با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی نهم

پاسخ فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب ریاضی پایه‌ی نهم

پایه‌ی نهم · دوره‌ی اول متوسطه

شامل پاسخ فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های همه‌ی فصل‌های کتاب

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست فصل‌ها

۱ فصل اول — مجموعه‌ها ۴

۲ فصل دوم — عددهای حقیقی ۲۶

۳ فصل سوم — استدلال و اثبات در هندسه ۴۱

۴ فصل چهارم — توان و ریشه ۷۱

۵ فصل پنجم — عبارت‌های جبری ۹۶

۶ فصل ششم — خط و معادله‌های خطی ۱۱۲

۷ فصل هفتم — عبارت‌های گویا ۱۲۶

۸ فصل هشتم — حجم و مساحت ۱۳۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی نهم - فصل اول

مجموعه‌ها

فهرست

۱ صفحه ۲ · فعالیت — شمارنده‌های ۶۰ و ساختن مجموعه ۶

۲ صفحه ۳ · فعالیت — تشخیص مجموعه و عضوهای تکراری ۷

۳ صفحه ۳ · فعالیت — نمایش مجموعه با نمودار ون ۷

۴ صفحه ۴ · کار در کلاس — مجموعه‌ی تهی و تک‌عضوی ۸

۵ صفحه ۴ · کار در کلاس — تشخیص مجموعه بودن عبارت ۹

۶ صفحه ۴ · کار در کلاس — کامل کردن مانند نمونه ۹

۷ صفحه ۴ · کار در کلاس — کدام مجموعه‌ی تهی است؟ ۱۰

۸ صفحه ۵ · کار در کلاس — مجموعه بودن عبارت و نمودار ون ۱۰

۹ صفحه ۵ · تمرین — مجموعه و عبارت متناظر ۱۱

۱۰ صفحه ۵ · تمرین — تکمیل جمله‌ها ۱۱

۱۱ صفحه ۵ · تمرین — سه مجموعه با عضو ۲ ۱۲

۱۲ صفحه ۶ · فعالیت — جدول جادویی و مجموعه‌ی سطر دوم ۱۲

۱۳ صفحه ۶ · فعالیت — سه عدد طبیعی متوالی با مجموع ۲۷ ۱۲

۱۴ صفحه ۶ · کار در کلاس — دو مجموعه‌ی برابر ۱۳

۱۵ صفحه ۷ · کار در کلاس — طرح دو مجموعه‌ی برابر ۱۳

۱۶ صفحه ۷ · فعالیت — زیرمجموعه ۱۳

۱۷ صفحه ۸ · کار در کلاس — درستی عبارت‌های زیرمجموعه (نمودار) ۱۴

۱۸ صفحه ۸ · کار در کلاس — زیرمجموعه و عضویت ۱۵

۱۹ صفحه ۸ · کار در کلاس — همه‌ی زیرمجموعه‌ها ۱۵

۲۰ صفحه ۱۰ · کار در کلاس — مجموعه‌ها با نماد ریاضی ۱۶

۲۱ صفحه ۱۰ · تمرین — مجموعه‌های برابر ۱۶

۲۲ صفحه ۱۰ · تمرین — زیرمجموعه‌ی زیرمجموعه ۱۶

۲۳ صفحه ۱۰ · تمرین — نوشتن زیرمجموعه‌ها ۱۷

۲۴ صفحه ۱۰ · تمرین — نمودار مجموعه‌های عددی ۱۷

۲۵ صفحه ۱۰ · تمرین — درستی یا نادرستی عبارت‌ها ۱۷

۲۶ صفحه ۱۱ · فعالیت — تیم‌های والیبال و فوتبال ۱۷

۲۷ صفحه ۱۱ · فعالیت — اشتراک و اجتماع ۱۸

۲۸ صفحه ۱۲ · فعالیت — نمودار ون اجتماع و اشتراک ۱۸

۲۹ صفحه ۱۲ · فعالیت — تفاضل دو مجموعه ۱۹

۳۰ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — عبارت‌های درست و نادرست از نمودار ۱۹

۳۱ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — شمارنده‌های ۱۲ و ۱۸ ۲۰

۳۲ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — تفاضل مجموعه‌های عددی ۲۰

۳۳ صفحه ۱۴ · تمرین — عملیات روی مجموعه‌ها ۲۱

۳۴ صفحه ۱۴ · تمرین — درست و نادرست با نمودار ۲۱

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۵ صفحه ۱۴ · تمرین — پر کردن جاهای خالی با کلمه‌ها ۲۱

۳۶ صفحه ۱۴ · تمرین — هاشور زدن ناحیه‌ها ۲۲

۳۷ صفحه ۱۶ · فعالیت — چرخنده و پیشامد ۲۲

۳۸ صفحه ۱۶ · کار در کلاس — کارت‌های ۱ تا ۱۰ ۲۳

۳۹ صفحه ۱۷ · تمرین — احتمال با تاس ۲۴

۴۰ صفحه ۱۷ · تمرین — خانواده‌ای با سه فرزند ۲۴

۴۱ صفحه ۱۷ · تمرین — مهره‌های رنگی ۲۴

۴۲ صفحه ۱۷ · تمرین — پرتاب دو تاس ۲۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱ صفحه ۲ فعالیت

شمارنده‌های طبیعی عدد ۶۰ را نوشته‌ایم و بین آنها شمارنده‌های اول را مشخص کرده‌ایم. شما هم شمارنده‌های ۶۰ را که اول‌اند، در یک منحنی بسته قرار دهید.

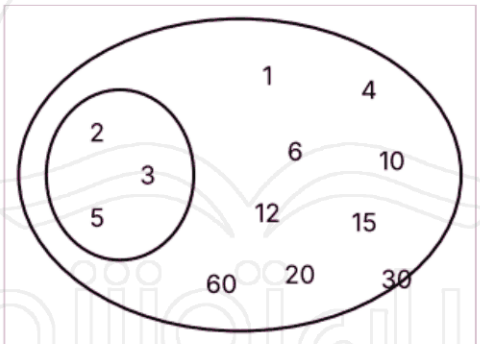
شمارنده‌های مرکب عدد ۶۰ را به‌صورت یک مجموعه بنویسید و آن را B بنامید.

مجموعه‌ی شامل شمارنده‌های عدد ۶۰ که نه اول باشند و نه مرکب، چند عضو دارد؟ این مجموعه را نیز C بنامید و آن را نمایش دهید.

مجموعه‌ی D شامل همه‌ی شمارنده‌های دو رقمی ۶۰ را تشکیل دهید؛ این مجموعه چند عضو دارد؟

از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعه‌ی شامل ۳ شمارنده‌ی زوج عدد ۶۰ را تشکیل دهند. احمد نوشت: {۴,۶,۱۰} و رضا نوشت: {۶,۱۰,۱۲}؛ به نظر شما چرا جواب‌های آنها با هم فرق دارد؟

شمارنده‌های طبیعی ۶۰: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60



شمارنده‌های اول ۶۰ یعنی ۲ و ۳ و ۵ را در یک منحنی بسته گذاشتیم: A = {2, 3, 5}، پس A سه عضو دارد.

مجموعه‌ی B

شمارنده‌های مرکب ۶۰ آنهایی‌اند که بیش از دو شمارنده دارند: B = {4, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60} (۸ عضو).

مجموعه‌ی C

عدد ۱ نه اول است و نه مرکب: C = {1} (۱ عضو).

مجموعه‌ی D

D = {10, 12, 15, 20, 30, 60} که ۶ عضو دارد.

تفاوت جواب رضا و احمد

عبارت «۳ شمارنده‌ی زوج ۶۰» مجموعه‌ای معین و یکتا مشخص نمی‌کند؛ شمارنده‌های زوج ۶۰ هشت‌تا هستند {2, 4, 6, 10, 12, 20, 30, 60} و انتخاب سه‌تا از آنها به شکل‌های گوناگون ممکن است. پس هر دو جواب درست‌اند و اختلاف آنها از نامشخص بودن عبارت است.

۲ صفحه ۳ فعالیت

کدام‌یک از عبارت‌های زیر مشخص‌کننده‌ی یک مجموعه است؟ مجموعه‌ی مورد نظر را نمایش دهید. الف) عددهای طبیعی و یک رقمی ب) چهار شاعر ایرانی ج) دو عدد اول کوچک‌تر از ۱۲

با توجه به شرط متمایز بودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پر کنید: الف) به‌جای {۱,۲,۱,۴,۵} = A باید بنویسیم {__ ,__ ,__ ,__ ,__} = A ب) به دلیل تکراری بودن عدد ____ در {۵,۶,۵,۷} = B آن را به‌صورت _____ می‌نویسیم.

پرسش ۱

- الف) مجموعه است (عضویت هر عدد کاملاً معین است): {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
- ب) مجموعه نیست؛ چون «چهار شاعر ایرانی» معین نیست و هر کس می‌تواند چهار شاعر دیگر انتخاب کند.
- ج) مجموعه نیست؛ عددهای اول کوچک‌تر از ۱۲ پنج‌تا هستند (۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱) و انتخاب «دو عدد» از آنها یکتا نیست.

پرسش ۲

- الف) A = {1, 2, 4, 5}
- ب) عدد ۵ تکراری است؛ پس B = {5, 6, 7} می‌نویسیم.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳ صفحه ۳ فعالیت

با توجه به نمودار ون، که برای دو مجموعه‌ی A و B رسم شده است، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید.

دو مجموعه‌ی {۱,۲,۳,۴,۵,۶} = A و {۵,۶,۷,۸} = B را در نظر بگیرید: دو مجموعه را با یک نمودار ون نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بسته‌ی مربوط به A و هم در منحنی بسته‌ی مربوط به B وجود دارد؟

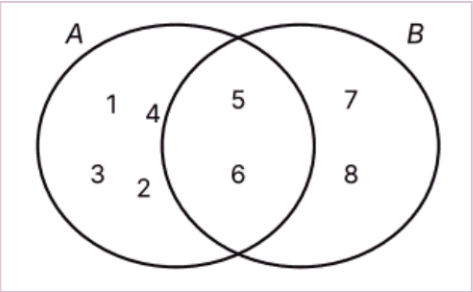
مجموعه‌ی عددهای دو رقمی و زوجِ اول را بنویسید و آن را E بنامید. این مجموعه چند عضو دارد؟

پرسش ۱

عضوهای هر منحنی را می‌خوانیم: A = {a, b, c} و B = {k, m, n, s, f} (در شکل، نمودار دو مجموعه جدا از هم است).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

پرسش ۲



عددهای ۵ و ۶ هم در A و هم در B هستند؛ یعنی $A \cap B = \{5, 6\}$ (در ناحیه‌ی مشترک دو منحنی).

پرسش ۳

تنها عدد اول زوج، ۲ است و دو رقمی نیست؛ پس چنین عددی وجود ندارد: $E = \emptyset$ و E هیچ عضوی ندارد (۰ عضو).

۴ صفحه ۴ **کار در کلاس**

سه عبارت بنویسید که هرکدام نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی تهی باشد؛ سپس عبارت‌های خود را با نوشته‌های هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

سه عبارت بنویسید که هرکدام مشخص‌کننده‌ی مجموعه‌ای فقط با یک عضو باشد.

پرسش ۱ (نمونه‌ی پاسخ)

- عددهای طبیعی بین ۲ و ۳
- عددهای صحیح بین ۵ و ۶
- عددهای اول زوج بزرگ‌تر از ۲

پرسش ۲ (نمونه‌ی پاسخ)

- عددهای طبیعی بین ۲ و ۴ {3}
- عددهای اول زوج {2}
- شمارنده‌های طبیعی عدد ۱ {1}

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵ صفحه ۴ کار در کلاس

عبارت‌هایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند، با علامت ✓ و بقیه را با علامت × مشخص کنید (با ذکر دلیل).
الف) چهار عدد فرد متوالی ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲ ج) عددهای اول کوچک‌تر از ۲۰ د) سه شهر ایران هـ) شمارنده‌های عدد ۲۴ و) ۵ عدد بزرگ ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳

مورد	نتیجه	دلیل / مجموعه
الف	×	چهار عدد فرد متوالی یکتا نیست (۱،۳،۵،۷ یا ۳،۵،۷،۹ و ...).
ب	✓	{2, 4, 6}
ج	✓	{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
د	×	معین نیست؛ شهرها را می‌توان به شکل‌های گوناگون انتخاب کرد.
هـ	✓	{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
و	×	«بزرگ» معین نیست.
ز	✓	مجموعه‌ی تهی است؛ چون عدد طبیعی بین ۲ و ۳ نداریم: ∅

۶ صفحه ۴ کار در کلاس

مانند نمونه کامل کنید: (جدول مجموعه‌ها و عبارت‌های توصیف‌کننده‌ی آنها: A، B، C، D، E، F، G و H)

مجموعه	عبارت / نمایش
A	مجموعه‌ی حروف الفبای فارسی: {الف، ب، پ، ...، ی} (نمونه)
B = {4, 8, 12, ...}	مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۴
C = {a, b, 3}	مجموعه‌ی حروف a و b و عدد ۳
D = {5}	مجموعه‌ی مضرب‌های اول عدد ۵
E = {2, 3, 5, 7}	مجموعه‌ی عددهای اول یک رقمی
F = {2, 4, 6, 8}	مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج یک رقمی
G = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	مجموعه‌ی عددهای طبیعی بین ۲ و ۱۰
H = {2, 3, 5, 7}	مجموعه‌ی عددهای اول کوچک‌تر از ۱۰ (برابر E)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷ صفحه ۴ | کار در کلاس

کدام‌یک از عبارت‌های زیر، مجموعه‌ی تهی را مشخص می‌کند؟ الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶ ب) عددهای صحیح بین ۱- و ۱ ج) عددهای اول و زوج د) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اول باشد.

- الف) بله؛ بین ۵ و ۶ عدد طبیعی نداریم: $\emptyset$
- ب) خیر؛ {0} یک عضو دارد.
- ج) خیر؛ {2}
- د) خیر؛ {3}

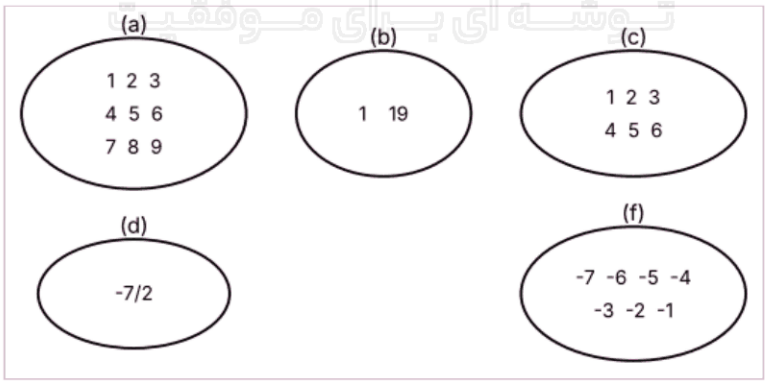
۸ صفحه ۵ | کار در کلاس

کدام‌یک از عبارت‌های زیر مشخص‌کننده‌ی یک مجموعه است؟ با نمودار ون نشان دهید: الف) عددهای صحیح مثبت و کمتر از ۱۰ ب) شمارنده‌های اول عدد ۱۹ ج) عددهایی که شش وجه یک تاس معمولی را مشخص می‌کند. د) جواب‌های معادله‌ی $2x+8=1$ هـ) چهار میوه‌ی خوشمزه و) عددهای صحیح منفی و بزرگ‌تر از ۸-

عبارت‌های «الف، ب، ج، د، و» مجموعه‌اند ولی «هـ» نه (خوشمزه بودن معین نیست و انتخاب چهار میوه یکتا نیست).

الف) $\{1,2,...,9\}$ ب) شمارنده‌های ۱۹: $\{1, 19\}$ ج) $\{1,2,3,4,5,6\}$

د) $2x+8=1 \Rightarrow x = -7/2$ پس $\{-7/2\}$ و) $\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7\}$



(در شکل، (a) تا (f) به ترتیب: الف، ب، ج، د، و.)

۹ صفحه ۵ تمرین

متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید: الف) {۱,۸,۲۷,۶۴,۱۲۵} = A ب) {۱۰} = C ج) عددهای طبیعی مضرب ۵ و کوچک‌تر از ۱۰۰ د) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵ هـ) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد. و) عددهای اول دو رقمی که مضرب ۷ باشد.

	عبارت	مجموعه	تعداد عضو
الف	مکعب پنج عدد طبیعی اول (۱ تا ۵)	{1, 8, 27, 64, 125}	۵
ب	عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۹ و کوچک‌تر از ۱۱	{10}	۱
ج	عددهای طبیعی مضرب ۵ و کوچک‌تر از ۱۰۰	{5, 10, 15, ..., 95}	۱۹
د	عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵	∅	۰
هـ	عددهای صحیح منفی بین ۴ و ۷	∅	۰
و	عددهای دو رقمی مضرب ۷	{14, 21, 28, ..., 98}	۱۳

در (و) متن «اول دو رقمی» است؛ هر مضرب ۷ بزرگ‌تر از ۷ مرکب است، پس با شرط «اول» مجموعه تهی می‌شود و با «دو رقمی و مضرب ۷» ۱۳ عضو دارد؛ حالت دوم آمده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰ صفحه ۵ تمرین

جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد. الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد»، یک مجموعه را مشخص _____ . ب) مجموعه‌ی {۹,...,۲,۳,۴} دارای _____ عضو است. ج) مجموعه‌ی {∅, ۰} = A دارای _____ عضو است. د) با توجه به مجموعه‌ی {۳,۵,۷,۹,۱۱} = A؛ داریم: ۵ عضو A است یا با نماد ریاضی، _____ و ۱۲ عضو A نیست یا با نماد ریاضی، _____ .

- الف) نمی‌کند (انتخاب ۵ عدد از بین عددهای ۲ تا ۱۹ یکتا نیست).
- ب) ۸ عضو
- ج) ۲ عضو (عضوها: ۰ و ∅)
- د) $5 \in A$ و $12 \notin A$

۱۱ صفحه ۵ تمرین

سه مجموعه‌ی متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آنها باشد.

{2, 4, 6} ، {1, 2, 3, 4} ، {2, a, b} (و هر مجموعه‌ی دیگری که ۲ در آن باشد).

۱۲ صفحه ۶ فعالیت

جدول عددهای صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعه‌ی عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید. (در جدول عددهای ۱۰ و ۱۲ در سطر اول و ۴- و ۲- در سطر سوم آمده‌اند.)

اکنون مجموعه‌ی B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد.

هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ آیا هر عضو A در مجموعه‌ی B است؟ آیا هر عضو B در مجموعه‌ی A است؟

مجموع سه عدد هر سطر ۱۲ است؛ پس عدد وسط ۴ می‌شود و هر دو عدد روبه‌روی هم (نسبت به مرکز) مجموعشان ۸ است.

جدول کامل‌شده

۱۰	۱۰-	۱۲
۶	۴	۲
۴-	۱۸	۲-

بررسی: مجموع هر سطر و ستون و قطر برابر ۱۲ است. سطر دوم: {2, 4, 6} = {6, 4, 2} = A

سه عدد زوج متوالی با میانگین ۴ یعنی ۲ و ۴ و ۶: {2, 4, 6} = B

هر دو مجموعه ۳ عضوی‌اند. هر عضو A در B و هر عضو B در A است؛ پس A و B یکسان‌اند و A = B.

۱۳ صفحه ۶ فعالیت

مجموعه‌ی A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به‌طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است: الف)

مجموعه‌ی عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰ ب) مجموعه‌ی عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱ ج) مجموعه‌ی سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است.

سه عدد متوالی با مجموع ۲۷ و میانگین ۹: A = {8, 9, 10}

- الف) {7, 8, 9} که با A برابر نیست.
- ب) {8, 9, 10} که با A برابر است.
- ج) میانگین ۹ یعنی {8, 9, 10} که با A برابر است.

۱۴ صفحه ۶ کار در کلاس

جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشد: (الف و ب؛ هر کدام شامل عددهایی به صورت کسر، عدد اعشاری و توان)

دو مجموعه برابرند وقتی عضوهای یکسان داشته باشند. برای پر کردن جای خالی، هر عبارت را ساده می‌کنیم (مثلاً 1/2 = 0.5، 5/8 = 0.625، √144 = 12) و عضوی را می‌نویسیم که در مجموعه‌ی مقابل هست ولی در این مجموعه نیامده؛ عضو تکراری نیز در مجموعه حساب نمی‌شود.

عبارت‌های این سؤال در متن استخراج‌شده خوانا نبود؛ فقط روش حل نوشته شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵ صفحه ۷ کار در کلاس

دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

نمونه: A = {1/2, 0.75, 3} و B = {3/4, 3, 5/10}؛ چون 0.75 = 3/4 و 5/10 = 1/2 و ۳ در هر دو است، A = B.

۱۶ صفحه ۷ فعالیت

مجموعه‌ی عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای مجموعه‌ی D را در نمودار ون روبه‌رو بنویسید.

در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۳ بخش‌پذیر است، با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید. مجموعه‌ی B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟

در مجموعه‌ی D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا C = D؟ آیا مجموعه‌ی C زیرمجموعه‌ی D است؟

اکنون زیرمجموعه‌ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشد؛ نام دیگر این مجموعه چیست؟

آیا عبارت $\{۲,۴,-۶,۱۰\} \subseteq D$ درست است؟ چرا؟

آیا در مجموعه‌ی تهی عضوی هست که در مجموعه‌ی دلخواهی مانند A نباشد؟

$D = \{10, -10, 12, 6, 4, 2, -4, 18, -2\}$ (۹ عضو).

عضوهای بخش‌پذیر بر ۳: $B = \{6, 12, 18\}$؛ بله، هر عضو B در D هست و $B \subseteq D$.

همه‌ی عضوهای D زوج‌اند؛ پس $C = D$، و هر مجموعه زیرمجموعه‌ی خودش است: $C \subseteq D$.

D عدد فرد ندارد؛ پس زیرمجموعه‌ای با عضوهای فرد، مجموعه‌ی تهی است: $\varnothing \subseteq D$.

عبارت داده‌شده (با توجه به متن، $\{2, 4, -6, 10\} \subseteq D$) نادرست است؛ چون ۶- عضو D نیست.

خیر؛ مجموعه‌ی تهی عضو ندارد تا در A نباشد؛ پس $\varnothing \subseteq A$ برای هر مجموعه‌ی A درست است.

۱۷ صفحه ۸ **کار در کلاس**

با توجه به نمودار مقابل (سه مجموعه‌ی A و B و C)، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

$A \subseteq \varnothing$ ، $C \subseteq B$ ، $B \subseteq A$ ، $A \subseteq B$ ، $C \subseteq A$ ، $B \subseteq C$ ، $A \subseteq C$

با فرض این‌که در نمودار $B \subseteq C \subseteq A$ باشد (منحنی B داخل C و C داخل A):

عبارت	نتیجه	دلیل
$C \subseteq A$	درست	همه‌ی عضوهای C در A هستند.
$B \subseteq A$	درست	همه‌ی عضوهای B در A هستند.
$A \subseteq C$	نادرست	A عضوی دارد که در C نیست.
$A \subseteq B$	نادرست	A عضوی دارد که در B نیست.
$B \subseteq C$	درست	همه‌ی عضوهای B در C هستند.
$\varnothing \subseteq A$	درست	مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ صفحه ۸ کار در کلاس

مجموعه‌های A و B و C را در نظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید (با ذکر دلیل): $A = \{۱,۳,۶,۴\}$ ، $B = \{۵,۱,۳\}$ ، $C = \{۲,۵,۱,۳,۶\}$ $B \subseteq A$ ، $۳ \subseteq B$ ، $A \subseteq B$ ، $B \subseteq C$ ، $A \subseteq C$ ، $۲ \in A$ $\{۱,۴\}$ $\exists A \subseteq ۰$ ، $۵ \in C$ ، $\{۵,۶\} \subseteq C$ ، $۶ \notin A$

عبارت	نتیجه	دلیل
$B \subseteq A$	نادرست	۵ در B هست ولی در A نیست.
$3 \subseteq B$	نادرست	۳ یک عضو است نه مجموعه؛ درست آن $3 \in B$ است.
$A \subseteq B$	نادرست	۶ و ۴ در A هستند ولی در B نیستند.
$B \subseteq C$	درست	۵ و ۱ و ۳ همگی در C هستند.
$A \subseteq C$	نادرست	۴ در A هست ولی در C نیست.
$2 \in A$	نادرست	۲ عضو A نیست.
$\{1,4\} \in A$	نادرست	$\{۱,۴\}$ عضو A نیست (زیرمجموعه است ولی عضو نیست؛ ضمناً ۴ و ۱ در A هستند و $\{1,4\} \subseteq A$ درست است).
$6 \notin A$	نادرست	۶ عضو A است.
$\{5,6\} \subseteq C$	درست	۵ و ۶ هر دو در C هستند.
$5 \in C$	درست	۵ عضو C است.
$0 \subseteq A$	نادرست	۰ مجموعه نیست و عضو A هم نیست؛ علامت $\supseteq$ بین دو مجموعه می‌آید.

۱۹ صفحه ۸ کار در کلاس

همه‌ی زیرمجموعه‌های $A = \{a,b,c\}$ در زیر نوشته شده است: $\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}, \emptyset$ مانند نمونه، تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید: الف) مجموعه‌ی عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲ ب) $\{a,b,c,d\}$

الف) مجموعه $\{10, 11\}$ است؛ ۴ زیرمجموعه دارد: $\{10, 11\}, \{11\}, \{10\}, \emptyset$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ب) مجموعه‌ی ۴ عضوی ۱۶ (2^4) زیرمجموعه دارد:

- بدون عضو: ∅
- یک عضوی: {a}, {b}, {c}, {d}
- دو عضوی: {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}
- سه عضوی: {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}
- چهار عضوی: {a,b,c,d}

۲۰ صفحه ۱۰ **کار در کلاس**

مجموعه‌های زیر را با عضوها مشخص کنید: الف) مجموعه‌ی عددهای صحیح فرد ب) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} , -۵ \le x < ۵\}$ ج) $B = \{۳k+۲ \mid k \in \mathbb{N}\}$

- الف) {..., −5, −3, −1, 1, 3, 5, ...}
- ب) $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
- ج) با قرار دادن $k = ۱, ۲, ۳, \ldots$ داریم $B = \{5, 8, 11, 14, \ldots\}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱ صفحه ۱۰ **تمرین**

مجموعه‌ی $A = \{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ را در نظر بگیرید. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم برابر است؟ $B = \{x \mid x \in A\}$ ، $C = \{x \mid x \in A , x^2 \le ۲\}$ ، $D = \{x \mid x \in A , x^4 = ۱\}$ ، $C = \{x \mid x \in A , -۱ \le x \le ۱\}$

- B: $x^2 \le 2$ فقط برای ۱− و ۰ و ۱: $B = \{-1, 0, 1\}$
- C: $C = \{-1, 0, 1\}$
- D: $x^4 = 1$ فقط برای ۱− و ۱: $D = \{-1, 1\}$

پس B و C برابرند ولی D با آنها برابر نیست.

۲۲ صفحه ۱۰ **تمرین**

سه مجموعه مانند A و B و C بنویسید؛ به‌طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $C \subseteq A$؟

مثلاً $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{1,2,3\}$ و $C = \{1,2\}$.

بله؛ هر عضو C در B است و هر عضو B در A؛ پس هر عضو C در A است و $C \subseteq A$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳ صفحه ۱۰ تمرین

تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید: الف) $\{x \mid x \in \mathbb{Z} , x+۲ = ۱۳\}$ ب) $A = \{x \mid x$ $B = \{۲x$ $= \{۰,۲,۳$

الف) $x + 2 = 13 \Rightarrow x = 11$؛ پس $A = \{11\}$ و زیرمجموعه‌ها: $\emptyset, \{11\}$

ب) $B = \{0, 4, 6\}$ و زیرمجموعه‌ها: $\emptyset, \{0\}, \{4\}, \{6\}, \{0,4\}, \{0,6\}, \{4,6\}, \{0,4,6\}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۴ صفحه ۱۰ تمرین

نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}$، W، $\mathbb{Z}$ را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری و با علامت $\supseteq$ با هم مقایسه کنید.

منحنی‌ها از داخلی‌ترین به بیرونی‌ترین: $\mathbb{N}$ (عددهای طبیعی)، W (عددهای حسابی)، $\mathbb{Z}$ (عددهای صحیح) و $\mathbb{Q}$ (عددهای گویا):

$$\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۵ صفحه ۱۰ تمرین

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید: الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. ب) هر عدد حسابی عددی گویاست. ج) هر عدد صحیح عددی گویاست. د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح‌اند.

- الف) نادرست؛ مثلاً $1/2$ گویاست ولی حسابی نیست.
- ب) درست؛ هر عدد حسابی مانند a را می‌توان به شکل $a/1$ نوشت: $W \subseteq \mathbb{Q}$
- ج) درست؛ $a = a/1 : \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
- د) درست؛ مثلاً $2 = 2/1$ هم گویاست و هم صحیح.

۲۶ صفحه ۱۱ فعالیت

در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال و فرشید و حسین و محمد فقط در تیم والیبال بازی می‌کنند. الف) اگر مجموعه‌ی دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار ون نمایش دهید

و سپس با عضوهایشان بنویسید. ب) مجموعه‌ی دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید. ج) مجموعه‌ی دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

نمودار ون (ناحیه‌ها)

V فقط در	F و V در اشتراک	F فقط در
فرشید، حسین، محمد	علی، رضا	سامان، احسان، حسن، کیوان، سبحان

(دو منحنی بسته‌ی V و F که ناحیه‌ی مشترک دارند؛ عضوها را در ناحیه‌های بالا بنویسید.)

V = {علی، رضا، فرشید، حسین، محمد}

F = {علی، رضا، سامان، احسان، حسن، کیوان، سبحان}

ب) {علی، رضا}

ج) {علی، رضا، فرشید، حسین، محمد، سامان، احسان، حسن، کیوان، سبحان} (۱۰ نفر)

۲۷ صفحه ۱۱ **فعالیت**

دو مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 6\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید و مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید: الف) A = ب) B = ج) مجموعه‌ی عددهایی که در هر دو مجموعه‌ی A و B هست (اشتراک A و B؛ نماد $A \cap B$) د) مجموعه‌ی عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه‌ی A و B هست (اجتماع A و B؛ نماد $A \cup B$)

- الف) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ب) $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- ج) $A \cap B = \{1, 2, 3\}$
- د) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۸ صفحه ۱۲ **فعالیت**

دو مجموعه‌ی $A \cap B = \{b,e\}$ و $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$ را در نظر بگیرید. از دانش‌آموزان یک کلاس خواسته شده است که با توجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را با نمودار ون نمایش دهند. پاسخ چهار دانش‌آموز این کلاس (ریحانه، حمیده، زهرا، حنانه) را در شکل می‌بینید. الف) درباره‌ی درستی یا نادرستی پاسخ این

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

دانش‌آموزان بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید. ب) آیا شما هم می‌توانید جواب درست دیگری به این سؤال بدهید؟ پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

معیار درستی: عددهای b و e باید در ناحیه‌ی مشترک ($A \cap B$) باشند؛ و هر یک از a و c و d باید فقط در یکی از دو منحنی باشد (چون اجتماع آنها را دارد ولی اشتراک ندارد). نموداری که b یا e را خارج از اشتراک گذاشته، یا a و c و d را در اشتراک آورده، یا عضوی را بیرون از هر دو منحنی گذاشته باشد، نادرست است.

ب) مثلاً $A = \{a, b, c, e\}$ و $B = \{b, d, e\}$؛ یا $A = \{b, e\}$ و $B = \{a, b, c, d, e\}$؛ در کل ۸ حالت وجود دارد (هر یک از a و c و d یا در A یا در B).

شکل‌ها دیده نشد؛ داوری درباره‌ی هر دانش‌آموز بر پایه‌ی معیار بالاست. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۹ صفحه ۱۲ **فعالیت**

با توجه به نخستین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد $V - F$ نمایش می‌دهیم: $V - F = \{\} = F - V = \{\}$

$V - F$ = {فرشید، حسین، محمد}

$F - V$ = {سامان، احسان، حسن، کیوان، سبحان}

۳۰ صفحه ۱۳ **کار در کلاس**

با توجه به نمودار (سه مجموعه‌ی A و B و C با عضوهای ۱ تا ۵) کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟ الف) $A \subseteq C$ ب) $B \subseteq C$ ج) $C \subseteq (A \cup B)$ د) $C \supseteq (A \cup B)$ هـ) $2 \in (A \cup B)$ و) $4 \in (A \cap B)$ ز) $A \cup B = A$ ح) $5 \in (A \cup B)$ ط) $4 \in (A \cup B)$

با توجه به نمودار (عضوهای ۳ و ۴ در A، عضوهای ۴ و ۵ در B، و C شامل A و B و عضوهای ۱ و ۲):

توشه ای برای موفقیت

	نتیجه		نتیجه
الف	درست	ج	نادرست
ب	درست	د	درست
هـ	نادرست	و	درست
ز	نادرست	ح	درست
ط	درست		

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۱ صفحه ۱۳ کار در کلاس

مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را B بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید: الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن، شمارنده‌ی ۱۸ باشد؛ ولی شمارنده‌ی ۱۲ نباشد. ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن، هم شمارنده‌ی ۱۲ و هم شمارنده‌ی ۱۸ باشد.

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ و $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

الف) $B - A = \{9, 18\}$

ب) $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$

۳۲ صفحه ۱۳ کار در کلاس

مجموعه‌های $(\mathbb{N} - \mathbb{Z})$، $(\mathbb{N} - W)$ و $(\mathbb{Z} - W)$ را تشکیل دهید.

- $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$
- $W - \mathbb{N} = \{0\}$
- $\mathbb{Z} - W = \{-1, -2, -3, \ldots\}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
مسیر موفقیت

۳۳ صفحه ۱۴ تمرین

مجموعه‌های $A = \{2,4,6,8,9\}$ و $B = \{9,3,7,1,5\}$ و $C = \{10,11,7,1\}$ را در نظر بگیرید؛ سپس هریک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید: الف) $A \cup B$ ب) $B \cup C$ ج) $A \cup C$ د) $A \cap B$ هـ) $A - B$ و) $C - B$ ز) $(A - C) \cup (B - C)$ ح) $C - (A \cup B)$ ط) $A \cap A$ ی) $A \cap \varnothing$ ک) $B \cup B$ ل) $C \cup \varnothing$

	مجموعه		مجموعه
الف	$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$	ب	$\{1,3,5,7,9,10,11\}$
ج	$\{1,2,4,6,7,8,9,10,11\}$	د	$\{9\}$
هـ	$\{2,4,6,8\}$	و	$\{10,11\}$
ز	$\{2,3,4,5,6,8,9\}$	ح	$\{2,3,4,5,6,8,9\}$
ط	$A = \{2,4,6,8,9\}$	ی	$\varnothing$
ک	$B = \{1,3,5,7,9\}$	ل	$C = \{1,7,10,11\}$

۳۴ صفحه ۱۴ تمرین

با توجه به نمودار زیر، عبارت‌های درست را با ✓ و گزاره‌های نادرست را با × مشخص کنید: الف) $B - A = \{۶,۷\}$ ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ ج) $(A - B) \cup (B - A) = \{۱,۲,۶\}$ د) $n(A \cup B) = ۸$ هـ) $A - B = B - A$ و) $n(A - B) = n(B - A)$

از نمودار: $A - B = \{1, 2\}$ ، $A \cap B = \{3, 4, 5, 9\}$ ، $B - A = \{6, 7\}$

	نتیجه		نتیجه
الف	✓	ب	✓
ج	×	د	✓
هـ	×	و	✓

نمودار دیده نشد و نقش عددها حدس زده شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۵ صفحه ۱۴ تمرین

کلمات و مجموعه‌های داده‌شده‌ی زیر را در جاهای خالی قرار دهید: ۱) ۳ A ۲) B ۴) اجتماع ۵) زیرمجموعه A) B ∪ الف) اشتراک دو مجموعه، زیرمجموعه‌ی _____ همان دو مجموعه است. ب) هریک از دو مجموعه‌ی

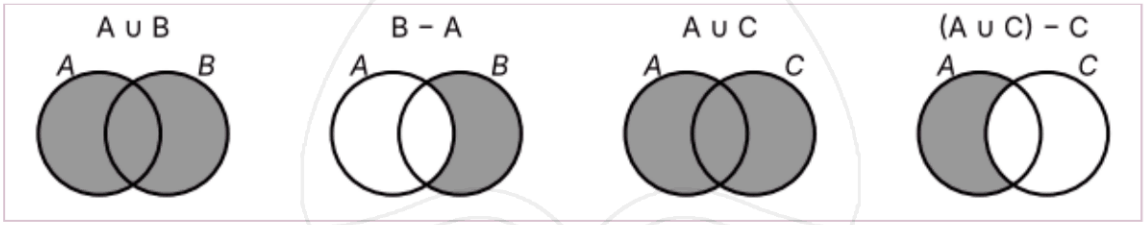
A و B زیرمجموعه‌ی _____ است. ج) اشتراک دو مجموعه‌ی A و B _____ هر یک از دو مجموعه‌ی A و B است. د) مجموعه‌ی A − B زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی _____ است. هـ) اجتماع دو مجموعه‌ی (A ∩ B) و (B − A) با مجموعه‌ی _____ مساوی است.

- الف) اجتماع (۳)
- ب) (A ∪ B) (۵)
- ج) زیرمجموعه‌ی (۴)
- د) A (۲)
- هـ) B (۱)؛ زیرا (A ∩ B) ∪ (B − A) = B

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۶ صفحه ۱۴ تمرین

در هریک از شکل‌های زیر مجموعه‌ی موردنظر را هاشور بزنید: (A ∪ C) − C ، A ∪ C ، B − A ، A ∪ B



شکل‌های سؤال دیده نشد؛ مجموعه‌ها از روی متن حدس زده شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۷ صفحه ۱۶ فعالیت

با توجه به چرخنده‌ی مقابل، همه‌ی حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعه‌ی S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید: الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید: A = {۱,۳} ← (عقربه روی ناحیه‌ی ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)، D = {۲}، C = {۳,۲}، B = {۱,۲} ب) هریک از زیرمجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به‌دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانس‌اند؟ ج) همه‌ی زیرمجموعه‌های S را تشکیل دهید.

فرض: چرخنده سه ناحیه‌ی هم‌اندازه با عددهای ۱ و ۲ و ۳ دارد: S = {1, 2, 3}

الف) B = {1,2}: عقربه روی عدد کوچک‌تر از ۳ بایستد. C = {2,3}: عقربه روی عدد بزرگ‌تر از ۱ بایستد. D = {2}: عقربه روی عدد ۲ (عدد زوج) بایستد.

ب) ۸ پیشامد داریم:

پیشامد	تعداد عضو	احتمال
$\varnothing$	۰	۰
{1}, {2}, {3}	۱	1/3
{1,2}, {1,3}, {2,3}	۲	2/3
S = {1,2,3}	۳	۱

پیشامدهای تک‌عضوی با هم هم‌شانس‌اند (۳ تا) و پیشامدهای دوعضوی نیز با هم هم‌شانس‌اند (۳ تا).

ج) $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۸ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم. الف) مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن S = {۱,۲,...,۱۰} است. پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج‌شده از ۵ کمتر باشد». مجموعه‌ی A را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به‌دست آورید. ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن پیشامد، ۴/۱۰ باشد. ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اول و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل دهید و احتمال رخداد هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس‌اند؟ چرا؟

الف) A = {1, 2, 3, 4} ، P(A) = 4/10 = 2/5

ب) مثلاً پیشامد «عدد خارج‌شده اول باشد»: {2, 3, 5, 7} که P = 4/10 است. (یا «عدد خارج‌شده از ۵ کمتر باشد» یا «مضرب ۳ یا ۱۰ یا ... »؛ هر مجموعه‌ی ۴ عضوی.)

ج) B = {2, 3, 5, 7} ، P(B) = 4/10 = 2/5 و C = {2, 4, 6, 8, 10} ، P(C) = 5/10 = 1/2

هم‌شانس نیستند؛ چون تعداد عضوهای آنها (۴ و ۵) برابر نیست و احتمال‌هایشان فرق دارد.

irantooshe.ir

۳۹ صفحه ۱۷ تمرین

اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد: الف) عدد رو شده زوج باشد. ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ‌تر باشد. ج) عدد رو شده زوج و اول باشد. د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ، $n(S) = 6$

- الف) $\{2,4,6\}$: $3/6 = 1/2$
- ب) $\{4,6\}$: $2/6 = 1/3$
- ج) $\{2\}$: $1/6$
- د) $\{1,2\}$: $2/6 = 1/3$

۴۰ صفحه ۱۷ تمرین

اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اولاً مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را تشکیل دهید (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د,د,پ) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟

(د = دختر، پ = پسر)

$S = \{$(پ,پ,پ) ,(پ,پ,د) ,(پ,د,پ) ,(د,پ,پ) ,(پ,د,د) ,(د,پ,د) ,(د,د,پ) ,(د,د,د)$\}$ که ۸ عضو دارد.

دقیقاً دو دختر: $\{$(پ,د,د) ,(د,پ,د) ,(د,د,پ)$\}$ پس $P = 3/8$

۴۱ صفحه ۱۷ تمرین

در جعبه‌ای ۳ مهره‌ی آبی و ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد: الف) این مهره آبی باشد. ب) این مهره سبز نباشد. ج) این مهره قرمز یا سبز باشد.

تعداد همه‌ی مهره‌ها $3+5+4 = 12$

- الف) $1/4 = 3/12$
- ب) مهره‌ی غیرسبز: $3+5 = 8$ ، $2/3 = 8/12$
- ج) $3/4 = 9/12 = (5+4)/12$

ایران توشه
بوسه‌ای برای موفقیت

۴۲ صفحه ۱۷ تمرین

اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد: (اگر مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را S بنامیم، n(S) = ۳۶) الف) هر دو بار، عدد اول رو شود. ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد. ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد. د) مجموع دو عدد، ۷ باشد.

- الف) «عدد اول» در متن به معنای عدد ۱ است (اولین عدد): فقط (1,1) ، 1/36
- ب) (1,1),(2,2),...,(6,6) : 1/6 = 6/36
- ج) مضرب‌های ۳: ۳ و ۶؛ (3,3),(3,6),(6,3),(6,6) : 1/9 = 4/36
- د) (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1) : 1/6 = 6/36

در (الف) معنای «اول» از متن خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی نهم - فصل دوم

عددهای حقیقی

فهرست

۴۳ صفحه ۱۹ · فعالیت — نمایش‌های مختلف مجموعه‌ی عددها ... ۲۷

۴۴ صفحه ۱۹ · فعالیت — پیدا کردن کسر بین دو کسر ۲۷

۴۵ صفحه ۲۰ · کار در کلاس — پیدا کردن کسر بین دو کسر ... ۲۸

۴۶ صفحه ۲۰ · فعالیت — مقایسه‌ی کسرها ۲۹

۴۷ صفحه ۲۲ · کار در کلاس — نمایش اعشاری کسرها ۳۰

۴۸ صفحه ۲۲ · تمرین — محاسبه‌ی عبارت‌ها و مرتب‌سازی کسرها ... ۳۰

۴۹ صفحه ۲۳ · فعالیت — عددهای بین ۱ و ۲ و مقدار تقریبی $2\sqrt{}$ ... ۳۱

۵۰ صفحه ۲۴ · کار در کلاس — درستی یا نادرستی رابطه‌ی مجموعه‌ها ... ۳۲

۵۱ صفحه ۲۴ · فعالیت — عددهای گویا روی محور ۳۲

۵۲ صفحه ۲۵ · کار در کلاس — عددهای گنگ بین دو عدد ۳۳

۵۳ صفحه ۲۵ · کار در کلاس — گذاشتن علامت $\ni$ یا $\notin$ ۳۴

۵۴ صفحه ۲۶ · کار در کلاس — وصل کردن مجموعه‌ها ۳۴

۵۵ صفحه ۲۶ · فعالیت — نمایش بازه‌ها روی محور ۳۴

۵۶ صفحه ۲۶ · کار در کلاس — مجموعه و محور ۳۵

۵۷ صفحه ۲۷ · تمرین — عددهای حقیقی و مجموعه‌های عددی ... ۳۵

۵۸ صفحه ۲۸ · فعالیت — قدر مطلق روی محور ۳۷

۵۹ صفحه ۲۹ · کار در کلاس — قدر مطلق و علامت عددها ۳۸

۶۰ صفحه ۳۰ · فعالیت — قدر مطلق عددهای رادیکالی ۳۸

۶۱ صفحه ۳۱ · کار در کلاس — مقایسه و محاسبه با قدر مطلق ... ۳۹

۶۲ صفحه ۳۱ · تمرین — قدر مطلق ۴۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۳ صفحه ۱۹ فعالیت

در فصل گذشته با نمایش‌های مختلف مجموعه‌ی عددها آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید: ردیف ۱) عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳ ← $\{x \in N \mid x \geq 3\}$ ← {۳, ۴, ۵, ...} ردیف ۲) عددهای حسابی ـــــــ ← $\{x \in W \mid x \geq 2\}$ ← {____} ردیف ۳) عددهای صحیح بین ۳- و ۲ ← $\{x \in Z \mid ____\}$ ← {____} ردیف ۴) عددهای صحیح بزرگ‌تر از ۱- ← {____} ← {____}

نامساوی $x \leq 3$ (یعنی $x \leq 3$) برای کدام‌یک از عددهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ درست است؟

در مورد محدودیت‌ها و مزایا و معایب هرکدام از روش‌های نمایش مجموعه در کلاس گفت‌وگو کنید.

ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	عضوها
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in N \mid x \geq 3\}$	{3, 4, 5, ...}
۲	عددهای حسابی بیشتر یا مساوی ۲	$\{x \in W \mid x \geq 2\}$	{2, 3, 4, ...}
۳	عددهای صحیح بین ۳- و ۲	$\{x \in Z \mid -3 < x < 2\}$	{-2, -1, 0, 1}
۴	عددهای صحیح بزرگ‌تر از ۱-	$\{x \in Z \mid x > -1\}$	{0, 1, 2, 3, ...}

روی محور، برای ردیف ۱ نقطه‌های ۳ و ۴ و ۵ و ... ، برای ردیف ۲ نقطه‌های ۲ و ۳ و ۴ و ... ، برای ردیف ۳ فقط نقطه‌های ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و برای ردیف ۴ نقطه‌های ۰ و ۱ و ۲ و ... را پررنگ می‌کنیم.

نامساوی $x \leq 3$

این نامساوی برای ۱ و ۲ و ۳ درست است؛ ولی برای ۴ و ۵ درست نیست.

گفت‌وگو

- نمایش با عضوها (فهرستی) برای مجموعه‌های کوچک ساده و دقیق است، ولی برای مجموعه‌های بزرگ یا نامتناهی فقط با «...» ناقص می‌شود.
- زبان نمادین دقیق و کوتاه است و برای مجموعه‌های نامتناهی مناسب است.
- نمایش روی محور تصویری روشن می‌دهد، ولی برای مجموعه‌های پیچیده یا بی‌نهایت عضوی همه‌ی نقطه‌ها را نمی‌توان نشان داد.

۴۴ صفحه ۱۹ فعالیت

می‌خواهیم بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز (مریم، بهار، مهناز و عطیه) نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه‌حل هر کدام را توضیح دهید.

الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان به هر تعداد، کسر پیدا کرد. ب) آیا مجموعه‌ی عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوها نشان داد؟ چرا؟ ج) آیا می‌توان مجموعه‌ی عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟ د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

توضیح روش‌ها

- **مریم:** کسرها را هم‌مخرج می‌کند: $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ و $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$؛ بین ۲ و ۳ عدد صحیحی نیست، پس صورت و مخرج را در ۲ ضرب می‌کند: $\frac{4}{12}<?<\frac{6}{12}$ و به $\frac{5}{12}$ می‌رسد. با ضرب در ۳ نیز $\frac{6}{18}<?<\frac{9}{18}$ و کسرهای $\frac{7}{18}$ و $\frac{8}{18}$ به دست می‌آیند.
- **بهار:** همان کار را روی محور انجام می‌دهد؛ فاصله‌ی ۰ تا ۱ را به ۶ و سپس ۱۲ قسمت مساوی تقسیم می‌کند و کسرهای میان $\frac{4}{12}$ و $\frac{6}{12}$ را می‌خواند: $\frac{5}{12}$.
- **مهناز:** میانگین دو کسر همیشه بین آنهاست: $\frac{1}{3}<\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{12}<\frac{1}{2}$.
- **عطیه:** میانگین را دوباره بین کسر تازه و یکی از کسرهای قبلی می‌گیرد: $\frac{1}{3}<\frac{\frac{1}{3}+\frac{5}{12}}{2}=\frac{3}{8}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}$.

الف

هر بار که صورت و مخرج را در عدد بزرگ‌تری ضرب کنیم (یا میانگین بگیریم) بین دو کسر، کسر تازه‌ای جا می‌شود؛ این کار هیچ‌گاه تمام نمی‌شود؛ پس بین هر دو کسر بی‌شمار کسر هست.

ب

خیر؛ چون بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویای دیگر هست و «عدد گویای بعدی» وجود ندارد، نمی‌توان همه‌ی عضوها را فهرست کرد.

ج

هر عدد گویا نقطه‌ای روی محور دارد؛ پس می‌توان عددهای گویا را با نقطه‌هایی روی محور نمایش داد. ولی این نقطه‌ها همه‌ی نقطه‌های محور را پر نمی‌کنند (مثلاً نقطه‌ی نمایش $\sqrt{2}$ روی محور هست ولی گویا نیست).

د

$Q=\{a/b \mid a,b\in Z, b\neq 0\}$ یعنی مجموعه‌ی همه‌ی کسرهایی که صورت و مخرج آنها صحیح و مخرج غیر صفر باشد.

۴۵ صفحه ۲۰ — کار در کلاس

۱ــ بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

۲ــ بین $-\frac{1}{2}$ و -1 دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

۱

هم‌مخرج می‌کنیم: $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$ و $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$. بین ۸ و ۱۵ عددهای ۹ تا ۱۴ هستند؛ پس مثلاً $\frac{9}{20}$ و $\frac{1}{2}=\frac{10}{20}$ و $\frac{3}{5}=\frac{12}{20}$ بین دو کسر قرار دارند.

۲

$-1=-\frac{8}{8}$ و $-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$. بین آنها مثلاً $-\frac{5}{8}$ و $-\frac{3}{4}=-\frac{6}{8}$ قرار دارند (یا با میانگین گرفتن: $-\frac{3}{4}$).

۴۶ صفحه ۲۰ **فعالیت**

۱ــ می‌خواهیم کسرهای $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{7}{8}$ و $\frac{5}{9}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم. روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به کار برده‌اند، با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در صورت لزوم کامل کنید. روش شاهد: شاهد به‌صورت تقریبی کسرها را روی محور مشخص کرده است. آیا به نظر شما استفاده از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟ روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم‌مخرج کردن، آنها را مقایسه می‌کند. توضیح دهید که عدد ۳۶۰ چگونه به دست می‌آید. کار مرتضی را کامل کنید. روش مجید: مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید. در مورد روش‌های مختلف و ویژگی‌های هر کدام در کلاس گفت‌وگو کنید.

۲ــ با استفاده از تقسیم، نمایش اعشاری کسرهای $\frac{3}{8}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{7}{6}$ را بنویسید. الف) بین نمایش اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟

روش مرتضی

۳۶۰ کوچک‌ترین مضرب مشترک ۵ و ۶ و ۸ و ۹ است:

$$5=5,\ 6=2\times 3,\ 8=2^3,\ 9=3^2 \Rightarrow 2^3\times 3^2\times 5=360$$

$$\frac{3}{5}=\frac{216}{360}\ ،\ \frac{5}{6}=\frac{300}{360}\ ،\ \frac{7}{8}=\frac{315}{360}\ ،\ \frac{5}{9}=\frac{200}{360}$$

پس ترتیب از کوچک به بزرگ: $\frac{5}{9}<\frac{3}{5}<\frac{5}{6}<\frac{7}{8}$.

روش مجید

$\frac{3}{5}=$ ۰/۶۰ ، $\frac{5}{6}\approx$ ۰/۸۳ ، $\frac{7}{8}\approx$ ۰/۸۸ ، $\frac{5}{9}\approx$ ۰/۵۶ ؛ ترتیب همان است: ۰/۵۶ < ۰/۶۰ < ۰/۸۳ < ۰/۸۸.

روش شاهد و گفت‌وگو

روش محور برای کسرهای نزدیک به هم (مثل $\frac{5}{6}$ و $\frac{7}{8}$) مناسب نیست؛ چون با رسم تقریبی تفاوت آنها دیده نمی‌شود. روش مخرج مشترک دقیق است ولی محاسبه‌ی بیشتری دارد؛ روش اعشاری سریع است و با ماشین حساب ساده می‌شود ولی باید رقم‌های کافی نوشت.

۲

$\frac{3}{8}=$ ۰/۳۷۵ ؛ $\frac{1}{3}=0.\overline{3}=0.333...$ ؛ $\frac{7}{6}=1.1\overline{6}=1.1666...$

الف) نمایش اعشاری $\frac{3}{8}$ متناهی (مختوم) است؛ ولی $\frac{1}{3}$ و $\frac{7}{6}$ نامتناهی و متناوب‌اند (رقم یا رقم‌هایی تکرار می‌شوند و پایان ندارند).

۴۷ صفحه ۲۲ **کار در کلاس**

نمایش اعشاری هر یک از کسرهای $\frac{5}{11}$ ، $\frac{7}{9}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{7}{22}$ ، $\frac{3}{20}$ ، $\frac{5}{16}$ را بنویسید.

کسر	نمایش اعشاری	نوع
$\frac{5}{11}$	$0.\overline{45}$	متناوب
$\frac{7}{9}$	$0.\overline{7}$	متناوب
$\frac{5}{6}$	$0.8\overline{3}$	متناوب
$\frac{7}{22}$	$0.3\overline{18}$	متناوب
$\frac{3}{20}$	۰/۱۵	مختوم
$\frac{5}{16}$	۰/۳۱۲۵	مختوم

فقط کسرهایی نمایش اعشاری مختوم دارند که (پس از ساده شدن) مخرجشان شمارنده‌ی اولی جز ۲ و ۵ نداشته باشد؛ مثل ۲×۲×۵=۲۰ و ۲×۲×۲×۲=۱۶.

۴۸ صفحه ۲۲ **تمرین**

۱ــ حاصل عبارت‌های داده‌شده را به دست آورید و تا حد امکان ساده کنید (عبارت‌های کسری ترکیبی با ضرب، تقسیم، جمع و تفریق).

۲ــ عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: الف) $\frac{7}{8}$ ، $-\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ، ۲ ، $-\frac{5}{6}$ ب) $\frac{16}{7}$ ، $-\frac{3}{4}$ ، ۲/۷۵ ، $3\frac{4}{5}$

۳ــ بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید: الف) $\frac{10}{11}$ و $\frac{12}{13}$ ب) $-\frac{1}{3}$ و ۰

۱

برای حل این گونه عبارت‌ها ابتدا داخل پرانتزها را با هم‌مخرج کردن حساب می‌کنیم، سپس ضرب و تقسیم (تقسیم = ضرب در وارون) و در پایان جمع و تفریق را انجام می‌دهیم و نتیجه را ساده می‌کنیم.

جدول و عبارت‌های این پرسش در متن خوانا نبود؛ بهترین برداشت ممکن حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲ الف

$$۲ > \frac{7}{8} > \frac{3}{4} > -\frac{2}{3} > -\frac{5}{6}$$

۲ ب

$$-\frac{3}{4} < \frac{16}{7} (\approx ۲/۲۹) < ۲/۷۵ < 3\frac{4}{5} (=۳/۸)$$

جدول و عبارت‌های این پرسش در متن خوانا نبود؛ بهترین برداشت ممکن حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳ الف

$\frac{10}{11} \approx ۰/۹۰۹$ و $\frac{12}{13} \approx ۰/۹۲۳$؛ سه کسر بین آنها: $\frac{91}{100}$ ، $\frac{183}{200}$ ، $\frac{23}{25}$.

۳ ب

$-\frac{1}{3} = -۰/۳۳۳...$؛ سه کسر بین آن و ۰: $-\frac{1}{4}$ ، $-\frac{1}{5}$ ، $-\frac{1}{6}$.

جدول و عبارت‌های این پرسش در متن خوانا نبود؛ بهترین برداشت ممکن حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۹ صفحه ۲۳ **فعالیت**

۱ــ پنج عدد بین ۱ و ۲ معرفی کنید و آنها را روی محور نمایش دهید.

۲ــ با توجه به اینکه مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ مساوی ۱/۴ است، آن را روی محور نشان دهید.

۳ــ معلم از دانش‌آموزان خواست با ماشین حساب، مقدار تقریبی عدد $\sqrt{2}$ را بنویسند. دانش‌آموزان ماشین‌حساب‌های ۸ رقمی، ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی داشتند. — چرا در ماشین حساب ۸ رقمی، رقم آخر با رقم مشابه در ماشین حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد؟ — چرا این تفاوت در ماشین حساب‌های ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی دیده نمی‌شود؟ — با توجه به عددی که ماشین حساب ۱۲ رقمی نشان می‌دهد، آیا تناوب در رقم‌های اعشاری

دیده می‌شود؟ — مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ تا ۱۵ رقم اعشار محاسبه شده است: ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۷۳۰۹۵. آیا تناوبی می‌بینید؟

۱

مثلاً ۱/۱ ، ۱/۲۵ ، ۱/۵ ، ۱/۷۵ ، ۱/۹؛ هر کدام را در جای مناسب بین نقطه‌های ۱ و ۲ روی محور علامت می‌زنیم (۱/۵ وسط دو نقطه‌ی ۱ و ۲).

۲

فاصله‌ی ۱ تا ۲ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم؛ نقطه‌ی چهارم پس از ۱ (۱/۴) تقریباً جای $\sqrt{2}$ است.

۳

- مقدار $\sqrt{2}$ در ماشین حساب ۸ رقمی ۱/۴۱۴۲۱۳۶ و در ۱۲ رقمی ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۷۳ است؛ ماشین ۸ رقمی رقم بعد (۶ در ۱/۴۱۴۲۱۳۵|۶۲...) را گرد می‌کند و رقم آخر ۵ به ۶ تبدیل می‌شود.
- در ماشین ۱۰ رقمی رقم بعد از آخرین رقم نمایش‌داده‌شده ۳ است (۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲|۳۷) و گرد کردن رقم آخر را تغییر نمی‌دهد؛ پس رقم‌های ۱۰ و ۱۲ رقمی در ابتدا یکسان‌اند.
- خیر، در ۱۲ رقم هیچ رقم یا گروهی از رقم‌ها به‌طور منظم تکرار نمی‌شود.
- در ۱۵ رقم هم تناوبی دیده نمی‌شود ($\sqrt{2}$ عددی گنگ است).

۵۰ صفحه ۲۴ **کار در کلاس**

کدام عبارت، درست و کدام عبارت، نادرست است؟ $Q \cap Q' = \emptyset$ $N \subseteq Q'$ $Q \subseteq Q'$ $Z \subseteq Q'$

- $Q \cap Q' = \emptyset$: درست (عددی نمی‌تواند هم گویا و هم گنگ باشد).
- $N \subseteq Q'$: نادرست (عددهای طبیعی مانند ۱ گویا هستند).
- $Z \subseteq Q$: درست (هر عدد صحیح را می‌توان به صورت کسری با مخرج ۱ نوشت).
- $Z \subseteq Q'$: نادرست.

علامت عمل مجموعه‌ای عبارت اول در متن خوانا نبود (برداشت: اشتراک). این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۱ صفحه ۲۴ **فعالیت**

الف) بین دو عدد ۱ و ۲ چند عدد گویا می‌توان نوشت؟ ب) اگر این عددها را روی محور نمایش دهیم، متناظر با این عددها، چند نقطه روی محور می‌توان پیدا کرد؟ ج) روی محور نقطه‌ی نمایش $\sqrt{2}$ را پیدا کنید. د) اگر

نقاطی را رنگ کنیم که عددی گویا را نمایش می‌دهد، آیا همه‌ی نقاط پاره‌خط AB رنگ می‌شود؟ آیا $\sqrt{2}$ نیز رنگ می‌شود؟ آیا این نقاط، که هر کدام نمایش یک عدد گویا است، یک پاره‌خط به وجود می‌آورد؟ چرا؟

- الف) بی‌شمار (بی‌نهایت) عدد گویا.
- ب) بی‌شمار نقطه.
- ج) مربعی به ضلع ۱ روی محور می‌سازیم؛ قطر آن $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ است. با پرگار به مرکز مبدأ و شعاع قطر، کمانی می‌زنیم تا محور را قطع کند؛ نقطه‌ی برخورد نمایش $\sqrt{2}$ است.
- د) خیر؛ همه‌ی نقاط پاره‌خط رنگ نمی‌شوند؛ نقطه‌ی $\sqrt{2}$ (و هر نقطه‌ی نمایش عدد گنگ) رنگ نمی‌شود. پس نقاط رنگی یک پاره‌خط (بدون شکاف) نمی‌سازند؛ چون در جای عددهای گنگ بی‌شمار «شکاف» دارند.

۵۲ صفحه ۲۵ **کار در کلاس**

۱ــ بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ چهار عدد گنگ بنویسید.

۲ــ بین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ چهار عدد گنگ بنویسید.

۳ــ الف) مجموعه‌ی A به‌صورت $A=\{x\in Q \mid \sqrt{2}\le x\le\sqrt{3}\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A روی محور به‌صورت یک پاره‌خط پر درست است؟ ب) نقطه‌ی نمایش $\sqrt{5}$ را روی محور مشخص کنید.

۱

$\sqrt{5}\approx 2.236$ و $\sqrt{10}\approx 3.162$؛ چهار عدد گنگ بین آنها: $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{8}$ و π (≈۳/۱۴).

۲

بین ۱/۴۱۴ و ۱/۷۳۲ مثلاً: ۱/۵۰۱۰۰۱۰۰۰۱... ، ۱/۶۰۱۰۰۱۰۰۰۱... ، ۱/۴۵۰۱۰۰۱۰۰۰۱... ، ۱/۷۰۱۰۰۱۰۰۰۱... (اعشار آنها نامتناهی و بدون تناوب است).

۳

الف) خیر؛ چون A فقط عددهای گویای آن بازه را دارد و عددهای گنگ بین ۱/۴۱۴ و ۱/۷۳۲ (مثل $\sqrt{2.25+0.1}$ ...) در آن نیستند؛ پس نمایش A روی محور پر نیست و شکاف دارد.

ب) مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های قائم ۱ و ۲ می‌سازیم؛ وتر آن $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ است. با پرگار وتر را روی محور از مبدأ جدا می‌کنیم.

صورت مجموعه‌ی A در متن (علامت‌های رادیکال) خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۳ صفحه ۲۵ کار در کلاس

۱ــ داخل جاهای خالی علامت ∋ یا ∌ بگذارید: $\sqrt{۴}$ __ ۴ ، $-۷/۳$ __ R ، -۵ __ R ، $۷/۲$ __ R ، $\sqrt{۱۸}$ __ Q ، $۰/۲$ __ Z
__ Q __ ۰/۰۹ ، Q′ __ ۳/۵ ، Q′ __ $\sqrt{۲۵}$ ، Z

∋ ۰/۰۹ ؛ Q′ ∌ ۳/۵ ؛ Q′ ∌ $\sqrt{۲۵}=۵$ ؛ Z ∌ $-۷/۳$ ؛ R ∋ -۵ ؛ R ∋ $۷/۲$ ؛ R ∋ $\sqrt{۱۸}$ ؛ Q ∋ ۰/۲ ؛ Z ∋ $\sqrt{۴}=۲$
.Q

جدول و عبارت‌های این پرسش در متن خوانا نبود؛ بهترین برداشت ممکن حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۴ صفحه ۲۶ کار در کلاس

۲ــ مجموعه‌های سطر اول را به مجموعه‌ی مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اول با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است. $Q \cap Q$ ، $Q' \cap R$ ، $Z \cap N$ ، $Q \cap Z$ ، $Q \cup Q'$ سطر دوم: R ، Q′ ، N ، ∅ ، Z

سطر اول	مساوی در سطر دوم
$Q \cup Q'$	R
$Q \cap Z$	Z
$Z \cap N$	N
$Q' \cap R$	Q′
$Q \cap Q'$	∅

علامت‌های اجتماع/اشتراک سطر اول در متن خوانا نبود؛ چینش بر پایه‌ی تناسب پاسخ‌ها انجام شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۵ صفحه ۲۶ فعالیت

با توجه به اینکه مجموعه‌ی عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را مانند نمونه روی محور نشان دهید: $D = \{x \in R \mid -۱ \le x \le ۵\}$ ، $C = \{x \in R \mid x < -۲\}$ ، $B = \{x \in R \mid ۲ \le x < ۳\}$ ، $A = \{x \in R \mid x \ge ۶\}$ با توجه به مجموعه‌ی A چرا نقطه‌ی ۲ روی محور توپر و نقطه‌ی ۳ توخالی است؟

- A: از ۲ (نقطه‌ی توپر) تا ۳ (نقطه‌ی توخالی) پاره‌خط پررنگ می‌شود.
- B: نیم‌خط پررنگ از -۲ (توخالی) به سمت چپ.
- C: پاره‌خط پررنگ از -۱ (توپر) تا ۵ (توپر).

- D: نیم‌خط پررنگ از ۶ (توپر) به سمت راست.

عدد ۲ عضو A است (چون $x \leq 2$ شامل برابری است) پس نقطه‌ی آن توپر می‌شود؛ ولی ۳ عضو A نیست (چون $x < 3$ برابری ندارد) پس توخالی می‌شود.

۵۶ صفحه ۲۶ — کار در کلاس

۱ــ مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا با توجه به محور، مجموعه‌ی متناظر آن را بنویسید: الف) $A = \{x \in R \mid x > -1\}$ ب) $B = \{\}$ ج) $C = \{x \in R \mid x \leq 2\}$

۲ــ با توجه به سه مجموعه‌ی A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را مشخص کنید: $0/75 \in A$ ، $0/25255525\ldots \in C$ ، $-1000 \in A$ ، $\sqrt{7} \in C$ ، $1 \in A$ ، $\sqrt{13} \in B$

۳ــ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه‌ی نقاط روی شکل (محور از ۳- تا ۳) برابر است؟ الف) {۳, ۲, ۱, ۰, ۱-} ب) $\{x \in R \mid x > -2\}$ ج) $\{x \in R \mid -2 < x < 3\}$

۱

- الف) نیم‌خط پررنگ از ۱- (توخالی) به سمت راست.
- ج) نیم‌خط پررنگ از ۲ (توپر) به سمت چپ.

۲

$0/75 \in A$ درست ($0/75 > -1$)؛ $\sqrt{13} \approx 3/6 \in A$ درست؛ $\sqrt{7} \approx 2/6 \in C$ نادرست ($2/6 < 2$)؛ $1 \in A$ درست؛ $-1000 \in C$ درست؛ برای $0/25255525\ldots \in B$ باید مجموعه‌ی B معلوم باشد.

۳

مجموعه‌ی (ج) = $\{x \in R \mid -2 < x < 3\}$.

مجموعه‌ی B و شکل پرسش ۳ دیده نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۷ صفحه ۲۷ — تمرین

۱ــ با توجه به مجموعه‌های داده‌شده، سایر سطرها را مانند سطر اول کامل کنید (عددهای ستون‌ها: $-6/2$ ، $0/2922922229\ldots$ ، -10 ، 0 ، $1/2$ ، $3/2$ ، π).

۲ــ در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید: الف) $A = \{x \in R \mid 1/5 < x\} > \{5\}$ ، $B = \{x \in Q \mid 1/5 < x < 5\}$ ب) $C = \{4,5,6,7,8\}$ ، $D = \{x \in R \mid 3 < x < 9\}$

۳ــ طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید: ۱) $R \cap Q =$ ۲) $R - Q' =$ ۳) $Z \cap N =$ ۴) $N \cup Z =$ '

۴ــ عدد $1 + \sqrt{5}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۵ــ بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید: الف) $\sqrt{5}$ و ۲- ب) $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ ج) $\sqrt{3}$ و $\sqrt{6}$ د) ۱/۴۱ و ۱/۴۲

۶ــ عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست مثال بزنید. ۱) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. ۲) عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد. ۳) عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. ۴) عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد.

۷ــ در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{10}$ و عدد $\frac{11}{3}$ چه تفاوتی هست؟

۱

عدد	N	W	Z	Q	Q'	R
$-۶/۲ = -۳$			✓	✓		✓
۰/۲۹۲۲۹۲۲۲۹...					✓	✓
۱۰-			✓	✓		✓
۰		✓	✓	✓		✓
π					✓	✓
۳/۲				✓		✓
۱/۲				✓		✓

جدول و عبارت‌های این پرسش در متن خوانا نبود؛ بهترین برداشت ممکن حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲

- الف) A همه‌ی عددهای حقیقی بین ۱/۵ و ۵ (گویا و گنگ مثل $\sqrt{۳}$ و π) را دارد؛ B فقط عددهای گویا را. پس $B \subset A$ و $\pi \in A$ ولی $\pi \notin B$؛ هر دو نامتناهی‌اند.
- ب) C پنج عضو دارد (متناهی)؛ D شامل همه‌ی عددهای حقیقی بین ۳ و ۹ است (نامتناهی) مثل ۳/۵؛ C زیرمجموعه‌ی D است ولی مساوی نیست.

۳

۱) $N \cup Z = Z$ (اجتماع) ۲) $R \cap Q' = Q$ ۳) $Z \cap N = N$ ۴) $R - Q' = Q'$

۴

$\sqrt{5} \approx 2.236 \Rightarrow 1 + \sqrt{5} \approx 3.236$ پس بین ۳ و ۴ است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵

- الف) $-\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{3}$ ، $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$
- ب) ۲/۵۰۱۰۰۱۰۰۰۱... ، ۲/۵۲۰۲۰۰۲۰۰۰۲... ، ۲/۵۳۰۳۰۰۳۰۰۰۳... ، ۲/۵۴۰۴۰۰۴۰۰۰۴...
- ج) ۱/۸۰۱۰۰۱۰۰۰۱... ، ۱/۹۰۱۰۰۱۰۰۰۱... ، ۲/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱... ، ۲/۲۰۱۰۰۱۰۰۰۱...
- د) ۱/۴۱۱۰۱۱۰۱۱۱... ، ۱/۴۱۲۰۱۲۰۰۱۲... ، ۱/۴۱۳۰۱۳۰۰۱۳... ، ۱/۴۱۴۰۱۴۰۰۱۴...

صورت بعضی قسمت‌های این پرسش در متن خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶

- ۱) درست؛ مثلاً ۲ (هم صحیح و هم گویاست).
- ۲) نادرست؛ مجموعه‌ی گویا و گنگ هیچ عضو مشترکی ندارند.
- ۳) درست؛ مثلاً $\sqrt{2}$.
- ۴) درست؛ مثلاً ۵ (طبیعی و حقیقی).

۷

$\sqrt{10} = 3.16227766...$ نمایش اعشاری نامتناهی و بدون تناوب دارد (گنگ است)، ولی $3.\overline{6} = \frac{11}{3}$ نامتناهی و متناوب است (گویاست).

۵۸ صفحه ۲۸ **فعالیت**

۱ــ با توجه به شکل، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید: نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهد؟ فاصله‌ی نقطه‌ی A از O یا طول پاره‌خط OA چقدر است؟ فاصله‌ی نقطه‌ی B از O یا طول پاره‌خط OB چقدر است؟

۲ــ می‌خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله‌ی آن از O برابر ۲ باشد. نقطه‌ی C را روی محور نمایش دهید به‌طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می‌توان یافت؟

- ۱) A نمایش عدد ۲ و B نمایش عدد −۲ است؛ OA = ۲ و OB = ۲.
- ۲) دو نقطه: یکی در سمت راست (عدد ۲) و دیگری در سمت چپ (عدد −۲) به فاصله‌ی ۲ از مبدأ.

شکل پرسش ۱ دیده نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۹ صفحه ۲۹ کار در کلاس

۱ــ جمله‌های سمت راست را به عبارت‌های مناسب در سمت چپ وصل کنید: الف) دو عدد a و b مثبت است. ب) عدد a نامنفی است. ج) دو عدد a و b منفی است. د) عدد a مثبت و عدد b منفی است. هـ) عدد a نامثبت است. (۱) $a\leq 0$ (۲) $a>0, b<0$ (۳) $a\geq 0$ (۴) $a<0, b<0$ (۵) $a>0, b>0$

۲ــ هر عبارت سمت راست، نتیجه‌ی منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید: الف) $a>0, b>0$ ب) $a<0, b<0$ ج) $a<0, b>0$ ؛ (۱) $ab>0, a+b<0$ (۲) $ab<0$ (۳) $ab>0, a+b>0$

۳ــ هر عبارت سمت راست، نتیجه‌ی منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید: الف) $a\geq 0$ ب) $a>0, b>0$ ج) $a<0$ د) $a<0, b<0$ ؛ (۱) $|a+b|$ (۲) $|a| = -a$ (۳) $|a| = a$ (۴) $|a+b| = a+b$ (۵) $|a| = -|a| = -(a+b)$

۴ــ عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید: ۱) قدر مطلق حاصل‌ضرب دو عدد، مساوی با حاصل‌ضرب قدر مطلق آنهاست. ۲) قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق‌های آن دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی با آن است.

۱

الف ← ۱ ؛ ب ← ۳ ؛ ج ← ۴ ؛ د ← ۲ ؛ هـ ← ۵

۲

الف ← ۲ ؛ ب ← ۳ ؛ ج ← ۱

۳

الف ← ۲ ؛ ب ← ۳ ؛ ج ← ۱ ؛ د ← ۴

۴

- ۱) $|a \times b| = |a| \times |b|$ ؛ مثال: $|3| \times |-2| = 6 = |-6| = |3 \times (-2)|$
- ۲) $|a + b| \leq |a| + |b|$ ؛ مثال: $|2| + |-3| = 5 \geq 1 = |2 + (-3)|$

۶۰ صفحه ۳۰ فعالیت

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است: $\sqrt{2}\approx 1/4$ ، $\sqrt{3}\approx 1/7$ ، $\sqrt{5}\approx 2/2$ ، $\sqrt{6}\approx 2/4$ ، $\sqrt{7}\approx 2/6$ ، $\sqrt{8}\approx 2/8$. با توجه به مقادیر تقریبی، تساوی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید: نمونه: $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$ (دلیل: $\sqrt{2}\approx 1/4$ پس $1-\sqrt{2}$ عددی منفی می‌شود) ۱) $|\sqrt{3} -$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲) $|\sqrt{۷}-\sqrt{۸}|$ ۳) $|\sqrt{۵}-۲/۵|$ ۴) $|\sqrt{۳}-۴|$ جدول زیر را کامل کنید (حاصل $\sqrt{a^2}$ به ازای چند عدد a). از فعالیت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

- ۱) $|\sqrt{۳}-۲| = -(\sqrt{۳}-۲) = ۲-\sqrt{۳}$ ؛ دلیل: $\sqrt{۳}\approx ۱/۷ < ۲$ پس $۲-\sqrt{۳}$ منفی است.
- ۲) $|\sqrt{۷}-\sqrt{۸}| = \sqrt{۸}-\sqrt{۷}$ ؛ دلیل: $\sqrt{۷}\approx ۲/۶ < \sqrt{۸}\approx ۲/۸$ پس $\sqrt{۷}-\sqrt{۸}$ منفی است.
- ۳) $|\sqrt{۵}-۲/۵| = ۲/۵-\sqrt{۵}$ ؛ دلیل: $\sqrt{۵}\approx ۲/۲ < ۲/۵$ پس عبارت منفی است.
- ۴) $|\sqrt{۳}-۴| = ۴-\sqrt{۳}$ ؛ دلیل: $\sqrt{۳}\approx ۱/۷ < ۴$ پس عبارت منفی است.

نتیجه: برای هر عدد حقیقی a داریم $\sqrt{a^2} = |a|$ ؛ مثلاً $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$ (و نه -۳). برای محاسبه‌ی $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$ داریم $|۱-\sqrt{۳}| = \sqrt{۳}-۱$ چون $\sqrt{۳}\approx ۱/۷ > ۱$.

جدول و عبارت‌های این پرسش در متن خوانا نبود؛ بهترین برداشت ممکن حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۶۱ صفحه ۳۱ — کار در کلاس

۱ــ عبارت‌های زیر را با هم مقایسه کنید: الف) $\sqrt{(-7)^2}$ و $|-۷|$ ب) $|۵|+|-۸|$ و $|۵+(-۸)|$ ج) $|۹|-|۳|$ و $|۳-۹|$

۲ــ عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید: $|۰|$ ، $|\sqrt{۳}-\sqrt{۷}|$ ، $|۰/۲۵-۰/۲۶|$

۳ــ حاصل عبارات زیر را به دست آورید: $\sqrt{(-5)^2}$ ، $\sqrt{(3-10)^2}$ ، $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$

۱

- الف) $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$ و $|-۷|=۷$ ؛ مساوی‌اند.
- ب) $۵+۸ = ۱۳$ و $|-۳| = ۳$ ؛ $۳ < ۱۳$ ($|a|+|b| \geq |a+b|$).
- ج) $۹-۳ = ۶$ و $|-۶| = ۶$ ؛ مساوی‌اند.

۲

$|۰| = ۰$ ؛ $|\sqrt{۳}-\sqrt{۷}| = \sqrt{۷}-\sqrt{۳}$ ؛ $|۰/۲۵-۰/۲۶| = |-۰/۰۱| = ۰/۰۱$

۳

الف) ۵ ب) $|-۷| = ۷$ ج) $|۲-\sqrt{۵}| = \sqrt{۵}-۲$ (چون $\sqrt{۵}\approx ۲/۲ > ۲$)

جدول و عبارت‌های این پرسش در متن خوانا نبود؛ بهترین برداشت ممکن حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۱ــ اگر $a = ۰/۲۵$ ، $b = -۱/۲$ و $c = ۱$ باشد، حاصل عبارت $|a+b| + ۲|a-b-c|$ را به دست آورید.

۲ــ عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید: الف) $|\sqrt{۳} - ۵|$ ب) $|۵\sqrt{۳} - ۷|$ ج) $|\sqrt{۵} + ۰|$

۳ــ جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب‌هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید: $|۵ - ۱۲| < ۱ +$ ▪

۴ــ مقدار عددی عبارت $|a| + a$ را به ازای $a = ۰$ ، $a = -۲$ و $a = ۲$ به دست آورید. آیا می‌توانید عددی حقیقی به‌جای a قرار دهید که حاصل $|a| + a$ منفی باشد؟

۵ــ با ارائه‌ی یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^2} = a$ را نشان دهید.

۶ــ حاصل عبارات روبه‌رو را به دست آورید: $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ ، $\sqrt{(\sqrt{10}-1)^2}$

۱

$|۰/۲۵ - ۰/۵| = |-۰/۲۵| = ۰/۲۵$ ؛ $|۰/۲۵ + ۰/۵ - ۱| = |-۰/۲۵| = ۰/۲۵$ ؛ پس حاصل $= ۰/۲۵ + ۲ \times ۰/۲۵ = ۰/۷۵ (= \frac{3}{4})$.

۲

الف) $۵ - \sqrt{۳}$ (چون $\sqrt{۳} < ۵$) ب) $۷ - ۵\sqrt{۳}$ (چون $۵\sqrt{۳} \approx ۶/۷ < ۷$) ج) $\sqrt{۵}$

۳

$|۵ - ۱۲| = ۷$ پس باید $۷ < ۱ +$ ▪ ؛ یعنی ▪ > ۶ ؛ مثلاً ۷ یا ۱۰.

۴

$a = ۰ : ۰ + ۲ = ۲$ ؛ $a = -۲ : -۲ + ۲ = ۰$ ؛ $a = ۲ : ۲ + ۲ = ۴$. چون $|a| \geq -a$، همیشه $|a| + a \geq ۰$؛ پس حاصل هیچ‌گاه منفی نمی‌شود.

۵

برای $a = -۳$: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ که با $a = -۳$ برابر نیست؛ درست آن $\sqrt{a^2} = |a|$ است.

۶

$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$ ؛ $\sqrt{(\sqrt{10}-1)^2} = \sqrt{10} - 1$ (چون $\sqrt{۱۰} \approx ۳/۲ > ۱$)

جدول و عبارت‌های این پرسش در متن خوانا نبود؛ بهترین برداشت ممکن حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی نهم - فصل سوم

استدلال و اثبات در هندسه

فهرست

۶۳ صفحه ۳۴ · فعالیت — مشاهده و اطمینان از درستی ۴۳

۶۴ صفحه ۳۴ · کار در کلاس — خطای حواس در درس علوم ۴۳

۶۵ صفحه ۳۵ · فعالیت — استدلال محسن و بیسکویت‌ها ۴۴

۶۶ صفحه ۳۵ · کار در کلاس — نتیجه‌گیری نادرست از رویدادهای گذشته ۴۵

۶۷ صفحه ۳۶ · کار در کلاس — ارتفاع‌های مثلث و تعمیم نادرست ۴۵

۶۸ صفحه ۳۶ · تمرین — عمودمنصف‌های مثلث ۴۶

۶۹ صفحه ۳۶ · تمرین — استدلال نیما و پژمان ۴۶

۷۰ صفحه ۳۷ · تمرین — استدلال مشابه درباره‌ی تصادف ۴۷

۷۱ صفحه ۳۷ · تمرین — حمید و وحید و ترتیب سن برادرها ۴۷

۷۲ صفحه ۳۷ · تمرین — اندازه‌گیری با نقاله ۴۷

۷۳ صفحه ۳۸ · فعالیت — فرض، حکم و استدلال در لوزی ۴۸

۷۴ صفحه ۳۸ · فعالیت — فرض و حکم قطرهای مستطیل ۴۸

۷۵ صفحه ۳۹ · کار در کلاس — فرض و حکم: زاویه‌ی سوم دو مثلث ۴۹

۷۶ صفحه ۳۹ · کار در کلاس — فرض و حکم: ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر ۴۹

۷۷ صفحه ۳۹ · کار در کلاس — فرض و حکم: زاویه‌ی خارجی مثلث ۵۰

۷۸ صفحه ۴۰ · فعالیت — نیمساز و همنهشتی (اشکال استدلال) ۵۰

۷۹ صفحه ۴۰ · فعالیت — تعمیم نیمساز قاعده به نیمساز دیگر ۵۱

۸۰ صفحه ۴۰ · فعالیت — قطر نیمساز در مربع ۵۱

۸۱ صفحه ۴۱ · فعالیت — چرا تعمیم ممکن است یا نیست؟ ۵۱

۸۲ صفحه ۴۱ · کار در کلاس — اعتبار استدلال‌های چهار دانش‌آموز ۵۲

۸۳ صفحه ۴۲ · فعالیت — پول حمید و سعید و بهرام ۵۳

۸۴ صفحه ۴۳ · تمرین — اعتبار اثبات زاویه‌ی خارجی مثلث ۵۳

۸۵ صفحه ۴۳ · تمرین — محدب و مقعر ۵۴

۸۶ صفحه ۴۴ · تمرین — اعتبار استدلال‌ها (محدب، مربع) ۵۴

۸۷ صفحه ۴۴ · تمرین — فاصله‌ی نقطه‌ی روی نیمساز از دو ضلع ۵۵

۸۸ صفحه ۴۵ · فعالیت — یادآوری: حالت‌های همنهشتی ۵۵

۸۹ صفحه ۴۵ · فعالیت — اجزای مجهول در مثلث‌های همنهشت ۵۶

۹۰ صفحه ۴۶ · فعالیت — رحل قرآنی: برابری AD و BC ۵۶

۹۱ صفحه ۴۶ · فعالیت — پل نیم‌دایره‌ای: BD = AC ۵۷

۹۲ صفحه ۴۷ · فعالیت — همنهشتی ADM و ABN در لوزی ۵۷

۹۳ صفحه ۴۷ · کار در کلاس — ضلع‌های مقابل متوازی‌الاضلاع ۵۸

۹۴ صفحه ۴۸ · کار در کلاس — اثبات برابری ضلع‌های مقابل متوازی‌الاضلاع ۵۸

۹۵ صفحه ۴۹ · کار در کلاس — زاویه‌های متوازی‌الاضلاع ۵۹

۹۶ صفحه ۴۹ · تمرین — قطرهای متوازی‌الاضلاع و مستطیل ۵۹

۹۷ صفحه ۴۹ · تمرین — میانه‌ی مثلث متساوی‌الساقین ۶۰

۹۸ صفحه ۴۹ · تمرین — مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه ۶۰

۹۹ صفحه ۵۰ · فعالیت — شکل مسئله‌ی دو روستا ۶۱

۱۰۰ صفحه ۵۱ · فعالیت — اثبات $BH' = AH$ ۶۱

۱۰۱ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — وتر و کمان برابر در دایره ۶۲

۱۰۲ صفحه ۵۲ · کار در کلاس — برابری پاره‌خط‌ها روی یک خط ۶۳

۱۰۳ صفحه ۵۲ · تمرین — $PQ = MN$ در متوازی‌الاضلاع ۶۳

۱۰۴ صفحه ۵۲ · تمرین — مماس‌ها و برابری AD و BC ۶۴

۱۰۵ صفحه ۵۲ · تمرین — مثلث AMN در مثلث متساوی‌الساقین ۶۴

۱۰۶ صفحه ۵۳ · تمرین — برابری BE و AF در مستطیل ۶۴

۱۰۷ صفحه ۵۳ · تمرین — فاصله‌ی نقطه‌ی نیمساز از دو سر قاعده ۶۵

۱۰۸ صفحه ۵۴ · فعالیت — درس پنجم: دیدن شباهت ۶۵

۱۰۹ صفحه ۵۵ · فعالیت — اندازه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌ها در شکل‌های متشابه ۶۵

۱۱۰ صفحه ۵۶ · فعالیت — کپی با مقیاس ۵۰٪ ۶۶

۱۱۱ صفحه ۵۶ · کار در کلاس — تشابه دو مربع ۶۷

۱۱۲ صفحه ۵۷ · کار در کلاس — مربعی با نسبت تشابه ۱/۲ ..... ۶۷

۱۱۳ صفحه ۵۷ · فعالیت — مثلث‌های متشابه و ضلع‌های متناظر ۶۷

۱۱۴ صفحه ۵۷ · فعالیت — مستطیل‌های متشابه ۶۸

۱۱۵ صفحه ۵۸ · کار در کلاس — تشابه دو مثلث در صفحه‌ی مختصات ۶۸

۱۱۶ صفحه ۵۸ · تمرین — همنهشتی و تشابه ۶۸

۱۱۷ صفحه ۵۸ · تمرین — تشابه لوزی‌ها ۶۹

۱۱۸ صفحه ۵۸ · تمرین — مقیاس نقشه ۶۹

۱۱۹ صفحه ۵۸ · تمرین — مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الساقین ۶۹

۱۲۰ صفحه ۵۸ · تمرین — پیدا کردن x در مثلث‌های متشابه ۶۹

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۳ صفحه ۳۴ فعالیت

۱ــ کدام‌یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ‌تر است؟ الف) با مشاهده تشخیص دهید. ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره‌ی محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر دایره‌ی کشیده‌شده بر شکل دیگر، اندازه‌ی آنها را با هم مقایسه کنید.

۲ــ اگر قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از شیرینی موردعلاقه‌ی شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعه‌ی بزرگ‌تر کدام است؟) با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؛ آیا حدس شما درست بود؟

۳ــ آیا مشاهده کردن یا به‌طورکلی استفاده از حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟

پرسش ۱

- الف) در نگاه اول قرصی که در میان دایره‌های کوچک است بزرگ‌تر به نظر می‌رسد (و دیگری که دور آن دایره‌های بزرگ است کوچک‌تر).
- ب) با کاغذ و انطباق، دو قرص دقیقاً هم‌اندازه‌اند؛ یعنی تشخیص ما با مشاهده اشتباه بود.

پرسش ۲

معمولاً قطعه‌ای را بزرگ‌تر حدس می‌زنیم که بلندتر یا باریک‌تر دیده می‌شود (مثلاً A). با انطباق کاغذ شفاف معلوم می‌شود دو قطعه هم‌اندازه‌اند و حدس ما نادرست بوده است.

پرسش ۳

خیر؛ حس‌های ما (مثل دیدن) گاهی دچار خطا می‌شوند (خطای دید). شکل و مشاهده فقط به حدس زدن کمک می‌کنند و برای اطمینان از درستی یک موضوع باید دلیل منطقی آورد.

شکل‌ها دیده نشد؛ پاسخ پرسش‌های ۱ و ۲ بر پایه‌ی این است که هر دو شکل خطای دید معروف‌اند. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۴ صفحه ۳۴ کار در کلاس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کند. در مورد نتایجی که از این مثال‌ها می‌گیرید، با یکدیگر بحث کنید.

- آزمایش سه ظرف آب: یک دست را در آب گرم و دست دیگر را در آب سرد می‌گذاریم، سپس هر دو را در آب ولرم فرو می‌بریم؛ دست اول آب را سرد و دست دوم آن را گرم حس می‌کند.
- مداد یا نی داخل لیوان آب شکسته دیده می‌شود (شکست نور)، در حالی که سالم است.
- سراب در جاده‌ی داغ؛ آب دیده می‌شود ولی وجود ندارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- پس از خوردن شیرینی، طعم لیمو را ترش‌تر حس می‌کنیم؛ و یک وسیله‌ی فلزی و چوبی هم‌دما، با لمس، سردی/گرمای متفاوت دارند.

نتیجه: حس‌های ما به شرایط (دمای قبلی، نور، زاویه‌ی دید و...) وابسته‌اند و گاهی خطا می‌کنند؛ پس برای اطمینان از درستی یک موضوع باید به ابزار دقیق و استدلال تکیه کنیم.

۶۵ صفحه ۳۵ فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌ها پاسخ دهید: ۱ــ امیر و محسن برای دیدن مسابقه‌ی فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت: «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه‌ی من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید: «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که: «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه‌ام باخته است.» آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟

۲ــ عباس یک بیسکویت مستطیل‌شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی‌متر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع‌شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام‌یک بیشتر است.

۳ــ دلیلی را که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است، با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به‌نظر شما کدام قابل اطمینان‌تر است؟

پرسش ۱

خیر. باختن در دفعه‌های گذشته دلیل قطعی برای باختن امروز نیست؛ اتفاق‌های گذشته نتیجه‌ی همیشگی نمی‌دهند و ممکن است این بار تیم برنده شود.

پرسش ۲

چون ضخامت و نوع یکی است، مقدار بیسکویت متناسب با مساحت است:

- عباس: $8 \times 4 = 32$ سانتی‌متر مربع
- باقر: $6 \times 6 = 36$ سانتی‌متر مربع

پس بیسکویت باقر بیشتر است.

پرسش ۳

دلیل فعالیت ۲ قابل اطمینان‌تر است؛ چون بر دانسته‌های ریاضی (فرمول مساحت) و محاسبه تکیه دارد و نتیجه‌اش همیشه درست است، ولی دلیل محسن فقط بر تجربه‌ی چند بار قبلی استوار است و می‌تواند نادرست باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۶ صفحه ۳۵ کار در کلاس

مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نیست.

- «تا به حال هر بار چتر نبرده‌ام باران نیامده است؛ پس امروز هم که چتر نمی‌برم باران نمی‌آید.»
- «در همه‌ی دفعه‌های قبل که پرتاب سکه کردم شیر آمد؛ پس این بار هم شیر می‌آید.»
- «چند بار با تاخیر به مدرسه رسیدم و نمره‌ام خوب شد؛ پس تأخیر باعث نمره‌ی خوب است.»

۶۷ صفحه ۳۶ کار در کلاس

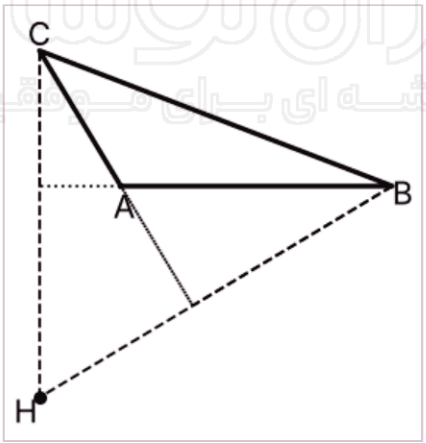
۲ــ دو ارتفاع از هر یک از مثلث‌های زیر رسم کنید.

آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟ یک مثال بزنید که نتیجه‌ی بالا را نقض کند.

اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟

ارتفاع‌های هر مثلث را از رأس‌ها بر ضلع روبه‌رو (یا امتداد آن) عمود می‌کنیم. در مثلث‌های حاده (تیزگوشه) نقطه‌ی برخورد دو ارتفاع درون مثلث می‌افتد.

خیر؛ با چند مثال خاص نمی‌توان حکم کلی گرفت. مثال نقض: مثلث ABC با زاویه‌ی باز (منفرجه) در رأس A؛ دو ارتفاع BK و CH را رسم می‌کنیم، آنها روی امتداد ضلع‌ها فرود می‌آیند و نقطه‌ی برخورد آنها (H) بیرون مثلث است (در مثلث قائم‌الزاویه هم این نقطه روی رأس زاویه‌ی قائمه است، نه درون مثلث).



این استدلال مشابه استدلال محسن (فعالیت ۱) است؛ یعنی نتیجه‌گیری کلی از چند مورد خاص (تجربه‌ی چند بار قبلی). در حالی که استدلال فعالیت ۲ بر محاسبه و دانش ریاضی تکیه داشت.

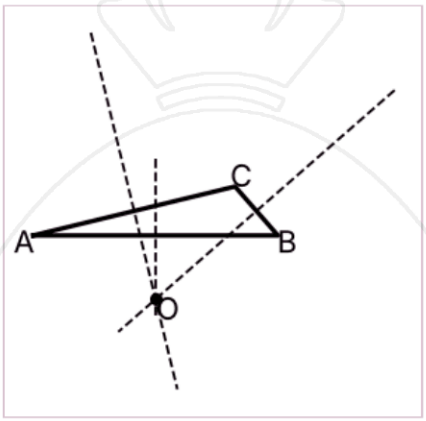
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۸ صفحه ۳۶ تمرین

۱ــ در شکل‌های زیر عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید: آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟

عمودمنصف هر ضلع را با خط‌کش و پرگار می‌سازیم (نقطه‌ی وسط ضلع و خط عمود بر آن). سه عمودمنصف در یک نقطه همرس‌اند.

خیر؛ چند شکل خاص برای حکم کلی کافی نیست. برای رد این ادعا یک مثال نقض کافی است: در مثلث منفرجه‌ای مانند شکل زیر، محل برخورد عمودمنصف‌ها (O) بیرون مثلث قرار می‌گیرد (در مثلث قائم‌الزاویه روی وسط وتر است). پس ادعا نادرست است.



شکل‌های مثلث‌ها دیده نشد؛ روش کلی و مثال نقض آمده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۹ صفحه ۳۶ تمرین

۲ــ نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری می‌خواست وزنه‌ای ۱۰۰ کیلویی را بلند کند. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند. نیما: زیرا هفته‌ی پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود، با این‌حال نتوانست وزنه‌ی ۹۰ کیلویی را بلند کند. پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه‌بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است. استدلال کدام‌یک قابل اعتمادتر است؟ درباره‌ی استدلال‌ها بحث کنید.

استدلال نیما قابل اعتمادتر است: کسی که با تمرین بهتر هم وزنه‌ی ۹۰ کیلویی را بلند نکرده است، به‌طور منطقی وزنه‌ی سنگین‌تر (۱۰۰ کیلویی) را نمی‌تواند بلند کند؛ یعنی نیما از یک واقعیت معلوم نتیجه می‌گیرد.

استدلال پژمان فقط بر تکرار رویدادهای گذشته (و ارتباط بی‌دلیل با زوج یا فرد بودن روز) تکیه دارد و ممکن است این بار درست از آب درنیاید.

۷۰ صفحه ۳۷ تمرین

۳ــ چون من تا به‌حال هیچ‌وقت تصادف نکرده‌ام، در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد. این استدلال مشابه کدام‌یک از استدلال‌های زیر است؟ الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه‌اند؛ پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند. ب) همه‌ی فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود، پس فیلم جنگی بوده است. ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچه‌ی خاله‌ی کوچکم هم که به زودی به دنیا می‌آید دختر خواهد بود. د) چون همه‌ی قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

استدلال مشابه، مورد «ج» است. در هر دو، از رویدادهای گذشته نتیجه گرفته می‌شود که در آینده نیز همان رخ می‌دهد (پیش‌بینی آینده بر پایه‌ی گذشته).

- الف) از «برخی» به «همه» تعمیم داده شده است.
- ب) نتیجه‌گیری معکوس است (جذاب بودن، فیلم جنگی بودن را نتیجه نمی‌دهد).
- د) نتیجه‌ای است که می‌تواند از ویژگی مشترک همه‌ی قرص‌ها برآید و با دلیل همراه است.

۷۱ صفحه ۳۷ تمرین

۴ــ حمید و وحید می‌دانستند که علی، حسن، حسین و باقر برادرند و: علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است؛ اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند. حمید: در تمام خانواده‌هایی که دو فرزند به نام‌های علی و حسن داشته‌اند، علی فرزند بزرگ‌تر بوده است. وحید: چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است. استدلال کدام‌یک درست است؟ درباره‌ی درستی استدلال‌ها بحث کنید.

استدلال وحید درست است: علی > حسین > حسن ، پس علی از حسن بزرگ‌تر است؛ یعنی از اطلاعات خود مسئله نتیجه گرفته است.

استدلال حمید نادرست است؛ او از خانواده‌های دیگر (مثال‌های گذشته) نتیجه گرفته است و آنچه در خانواده‌های دیگر دیده شده، دلیلی برای این خانواده نیست.

۷۲ صفحه ۳۷ تمرین

۵ــ معلم از دانش‌آموزان خواست با استدلال ریاضی ثابت کنند که در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده با هم برابرند. احمد زاویه‌ها را با نقاله اندازه‌گیری کرد و نتیجه گرفت که زاویه‌ها مساوی

هستند. چرا این روش برای اثبات کردن درست نیست؟ چرا اندازه‌گیری روش مناسبی برای نتیجه‌گیری نیست؟

- احمد فقط یک (یا چند) مثلث خاص را اندازه گرفته است و برای همه‌ی مثلث‌های متساوی‌الساقین نمی‌توان نتیجه‌ی آن را تعمیم داد.
- اندازه‌گیری همیشه با خطا همراه است (دقت نقاله و خط‌کش و چشم)؛ ممکن است دو زاویه کمی متفاوت باشند ولی مساوی به نظر برسند.
- اثبات باید با دلیل منطقی و از فرض‌ها و دانسته‌های قبلی انجام شود، نه با اندازه‌گیری.

۷۳ صفحه ۳۸ **فعالیت**

۱ــ به گفت‌وگوی زیر توجه کنید: مهرداد: آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟ سعید: بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است. در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید: فرض: شکل لوزی است. حکم: _____ برابر است. استدلال: لوزی نوعی _____ است. در لوزی زاویه‌های روبه‌رو _____ ⇒ در متوازی‌الاضلاع _____ برابر است.

- فرض: شکل لوزی است.
- حکم: زاویه‌های روبه‌رو (در لوزی) با هم برابرند.

استدلال:

- لوزی نوعی «متوازی‌الاضلاع» است.
- در متوازی‌الاضلاع «زاویه‌های روبه‌رو» برابر است ⇒ پس در لوزی نیز زاویه‌های روبه‌رو «با هم برابرند».

۷۴ صفحه ۳۸ **فعالیت**

۲ــ اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئله‌ی زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت‌شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید: فرض: ABCD مستطیل است. حکم: قطرهای مستطیل، مساوی است. AB , ____ = AD · ۹۰° = ____ = ____ = ____ = Â = ____ · حکم: AB · ____ = AC ∥ ____ , ____ ∥ AD

فرض: ABCD مستطیل است؛ حکم: قطرهای AC و BD برابرند. واقعیت‌های دانسته درباره‌ی مستطیل (مستطیل متوازی‌الاضلاعی با چهار زاویه‌ی قائمه است):

- $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- $AB = CD$ ، $AD = BC$ (ضلع‌های روبه‌رو برابرند)
- $AD \parallel BC$ ، $AB \parallel CD$

حکم: $AC = BD$

۷۵ صفحه ۳۹ کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید: ۱ــ در دو مثلث داده‌شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است. فرض: ____ = ____ ، ____ = ____ حکم: ____ = ____

- فرض: $\hat{A} = \hat{D}$ ، $\hat{B} = \hat{E}$ (دو مثلث ABC و DEF)
- حکم: $\hat{C} = \hat{F}$

دانسته‌ی قبلی: مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است؛ پس $\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 180 - \hat{D} - \hat{E} = \hat{F}$

نام‌گذاری زاویه‌های برابر در شکل دیده نشد؛ دو زاویه‌ی نام‌برده نمونه است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷۶ صفحه ۳۹ کار در کلاس

۲ــ اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر. (ابتدا شکل را رسم کرده و نام‌گذاری کنید).

مثلث ABC را رسم می‌کنیم که در آن زاویه‌ی B بزرگ‌تر از زاویه‌ی C است (ضلع روبه‌رو به B ضلع AC و ضلع روبه‌رو به C ضلع AB است).

- فرض: ABC مثلث است و $\hat{B} > \hat{C}$
- حکم: $AC > AB$
- دانسته‌های قبلی: مجموع زاویه‌های مثلث، تعریف زاویه‌ی بزرگ‌تر و ضلع مقابل (و در صورت لزوم: در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور قاعده برابرند).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۷ صفحه ۳۹ | کار در کلاس

۳ــ نشان دهید در هر مثلث اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن برابر است.

فرض و دانسته‌های قبلی:

- فرض: ABC مثلث است و $\hat{A}_1$ زاویه‌ی خارجی در رأس A (روی امتداد ضلع BA یا CA) است. (شکل: مثلث ABC با امتداد ضلع BC و زاویه‌ی خارجی $\hat{C}_1$ در رأس C)
- حکم: $\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$
- دانسته‌های قبلی: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰ است؛ زاویه‌ی راست (مستقیم) ۱۸۰ درجه است و زاویه‌ی خارجی با زاویه‌ی داخلی مجاور خود روی یک خط است.

نتیجه: $\hat{C}_1 = 180 - \hat{C}$ و $\hat{A} + \hat{B} = 180 - \hat{C}$ ، پس $\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$.

۷۸ صفحه ۴۰ | فعالیت

۱ــ در مسئله‌ی زیر، فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده‌شده را بیابید، سپس استدلال درستی برای آن بنویسید. مسئله: در شکل مقابل پاره‌خط AC نیمساز زاویه‌ی A است و ضلع‌های AB و AD برابرند. ثابت کنید مثلث‌های ABC و ADC همنهشت‌اند. فرض: ــــ حکم: ــــ استدلال: چون AC نیمساز است، داریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و از طرفی AC نیز ضلع مشترک در هر دو مثلث است، لذا دو مثلث ABC و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (زضز) همنهشت‌اند.

- فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AC نیمساز زاویه‌ی A) ، $AB = AD$
- حکم: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

اشکال استدلال: AC فقط نیمساز زاویه‌ی A است و برابری زاویه‌های $\hat{C}_1$ و $\hat{C}_2$ از فرض نتیجه نمی‌شود؛ ضمناً فرض برابری ضلع‌های AB و AD در استدلال به‌کار نرفته است.

استدلال درست:

- $AB = AD$ (فرض)
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AC نیمساز است)
- $AC = AC$ (ضلع مشترک)
- پس دو مثلث به حالت (ض ز ض) همنهشت‌اند: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

شکل و متن استدلال کتاب به‌طور کامل خوانا نبود؛ اشکال بر پایه‌ی متن استخراج‌شده نوشته شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۷۹ صفحه ۴۰ فعالیت

۲ــ مثلث زیر متساوی‌الساقین و AD نیمساز وارد بر قاعده‌ی آن است. با استدلال زیر نشان داده‌ایم که نیمساز وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد. AB = AC (ساق‌های برابر) ، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AD نیمساز است) ، AD = AD (ضلع مشترک) ⇒ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ض ز ض) ⇒ BD = CD لذا نقطه‌ی D وسط BC است و AD میانه است. آیا در مثلث ABC می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه‌ی B نیز میانه‌ی ضلع مقابل آن است؟ به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات‌شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد؟

خیر. در استدلال بالا از برابری ساق‌های AB و AC استفاده شد که فقط برای نیمساز زاویه‌ی رأس (A) به کار می‌آید. برای نیمساز زاویه‌ی B، ضلع‌های BA و BC که زاویه‌ی B را می‌سازند برابر نیستند (مگر مثلث متساوی‌الاضلاع باشد)؛ پس مثلث‌های لازم همنهشت نمی‌شوند و نیمساز B الزاماً میانه نیست.

مثال نقض: مثلث متساوی‌الساقین با رأس ۱۰۰° و زاویه‌های ۴۰° در قاعده؛ نیمساز زاویه‌ی ۴۰° ضلع روبه‌رو را به دو قسمت نابرابر تقسیم می‌کند (نیمساز، ضلع را به نسبت ضلع‌های مجاور زاویه می‌شکند).

۸۰ صفحه ۴۰ فعالیت

۳ــ با استدلال زیر به‌سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع همنهشت‌اند و زوایای متناظر با هم برابرند؛ بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا AC نیمساز است. آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟

بله. در مربع همه‌ی ضلع‌ها برابرند: مثلث‌های ABD و CBD نیز دارای AB = CB ، AD = CD و ضلع مشترک BD هستند؛ پس به حالت (ض ض ض) همنهشت‌اند و زاویه‌های متناظر برابرند: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ و $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$. پس BD هم نیمساز زاویه‌های B و D است. ویژگی‌هایی که در استدلال به‌کار رفت (برابری همه‌ی ضلع‌ها) در قطر دیگر هم وجود دارد.

۸۱ صفحه ۴۱ فعالیت

۴ــ به‌نظر شما چرا در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود؛ اما در فعالیت ۳ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می‌شود؟

۵ــ نقطه‌ای مانند P، روی عمودمنصف پاره‌خط AB در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره‌خط وصل می‌کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ز ض) همنهشت‌اند، نتیجه می‌گیریم پاره‌خط‌های PA و PB با هم برابر

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

است. بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی P، که روی عمودمنصف پاره‌خط AB است، از دو سر پاره‌خط AB یکسان‌اند. آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه‌ی بالا برای «هر» نقطه‌ی روی عمودمنصف برقرار است، کافی است؟

پرسش ۴

در فعالیت ۲ استدلال به برابری ساق‌های AB و AC تکیه داشت که فقط درباره‌ی نیمساز زاویه‌ی رأس درست است و برای زاویه‌های دیگر مثلث (که ضلع‌های مجاورشان برابر نیست) وجود ندارد. اما در مربع همه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌ها مثل هم‌اند و هر ویژگی که برای یک قطر به‌کار رفت، برای قطر دیگر هم برقرار است.

پرسش ۵

بله، کافی است. در اثبات فقط از ویژگی‌هایی استفاده شد که برای هر نقطه‌ی روی عمودمنصف برقرار است (AH = BH ، PH ⊥ AB و ضلع مشترک PH) و به جای خاص P وابسته نبود؛ پس P نقطه‌ی دلخواهی است و نتیجه برای همه‌ی نقطه‌های عمودمنصف درست است. (قاعده: اگر همه‌ی ویژگی‌های به‌کار رفته در استدلال برای سایر عضوهای مجموعه نیز برقرار باشد، نتیجه تعمیم‌پذیر است.)

۸۲ صفحه ۴۱ **کار در کلاس**

به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش‌آموز برای مسئله‌ی زیر آورده‌اند: مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰ است. استدلال حامد: یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه ۶۰ است، مجموع زاویه‌های مثلث ۱۸۰ است. استدلال حسین: چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را اندازه گرفت و دید که در همه‌ی آنها مجموع زوایای داخلی برابر ۱۸۰ است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ است. استدلال مهدی: مهدی شکلی را که از مثلث‌های همنهشت تشکیل شده است کشید و با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC، با استفاده از شکل $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_3 = ۱۸۰$ را نتیجه گرفت. استدلال رضا: می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند، با آنها هشت زاویه می‌سازد که چهار به چهار با هم مساوی‌اند». مثلث دلخواه ABC را در نظر می‌گیریم؛ از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم؛ سه زاویه‌ی تشکیل‌شده در رأس A را با ۱ و ۲ و ۳ نشان می‌دهیم: $\hat{A}_1 = \hat{B}$ (مورب AB) و $\hat{A}_3 = \hat{C}$ (مورب AC) و $\hat{A}_2$ همان $\hat{A}$ است؛ پس $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = ۱۸۰$. درباره‌ی معتبر بودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید.

- **حامد:** نامعتبر؛ فقط حالت خاص مثلث متساوی‌الاضلاع را بررسی کرده و نمی‌توان آن را به همه‌ی مثلث‌ها تعمیم داد.
- **حسین:** نامعتبر؛ اندازه‌گیری تقریبی است و چند مثال (هرچند زیاد) برای همه‌ی مثلث‌ها اثبات نیست.
- **مهدی:** کامل نیست؛ نتیجه‌ی او به شکل و دیدن اینکه سه زاویه کنار هم یک خط راست می‌سازند وابسته است. اگر دلیل همنهشتی و راست‌بودن این زاویه‌ها نوشته شود، استدلال می‌تواند معتبر شود.

- **رضا:** معتبر؛ مثلث دلخواه است و از قضیه‌ی خطوط موازی و مورب (که قبلاً ثابت شده) استفاده می‌کند و روی هر مثلث کار می‌کند.

شکل مهدی دیده نشد؛ داوری درباره‌ی او بر پایه‌ی شرح متن است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۸۳ صفحه ۴۲ فعالیت

مسئله: حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به‌نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

بین استدلالی که برای مسئله‌ی قبل و مسئله‌ی بعدی هست، چه شباهتی می‌بینید؟ مسئله: نشان دهید زاویه‌های متقابل به رأس با هم برابرند. فرض کنیم $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ مانند شکل زیر متقابل به رأس باشند، داریم: $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = ۱۸۰$ و $\hat{O}_3 + \hat{O}_2 = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_3 + \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$

پول‌ها را با حرف نشان می‌دهیم: حمید + بهرام = 5000 و سعید + بهرام = 5000 ؛ پس = حمید + بهرام سعید + بهرام . اگر از دو طرف پول بهرام را کم کنیم، حمید = سعید ؛ پول حمید و سعید برابر است.

شباهت: در هر دو مسئله دو مقدار (پول حمید و سعید؛ زاویه‌های $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$) را با یک مقدار مشترک (پول بهرام؛ زاویه‌ی $\hat{O}_2$) جمع کرده‌ایم و مجموع هر دو برابر یک عدد یکسان است (۵۰۰۰ تومان؛ ۱۸۰ درجه). با حذف مقدار مشترک از دو طرف تساوی، دو مقدار مجهول برابر نتیجه می‌شوند.

---

۸۴ صفحه ۴۳ تمرین

۱ــ آیا اثبات مسئله‌ی زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. مسئله: در هر مثلث، اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی با مجموع اندازه‌های دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور با آن برابر است. اثبات: مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ است و زوایای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هر کدام ۶۰ است؛ بنابراین $\hat{A}_1 = ۱۸۰ - \hat{A}_2 = ۱۸۰ - ۶۰ = ۱۲۰$ و $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = ۱۸۰ \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C} = ۶۰ + ۶۰ = ۱۲۰ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C}$

خیر، معتبر نیست؛ زیرا فقط برای مثلث متساوی‌الاضلاع (یک حالت خاص) درست نشان داده شده است، در حالی که مسئله درباره‌ی هر مثلث دلخواه است. ویژگی «برابری سه زاویه با ۶۰ درجه» در همه‌ی مثلث‌ها وجود ندارد؛ پس نتیجه قابل تعمیم نیست.

اثبات درست: برای مثلث دلخواه ABC با زاویه‌ی خارجی $\hat{A}_1$ در رأس A داریم $\hat{A}_1 + \hat{A} = 180$ و $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180$ ؛ پس $\hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C}$.

۸۵ صفحه ۴۳ تمرین

۲ــ در سال گذشته با تعریف چندضلعی‌های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را می‌توان بدین صورت هم آورد: «یک چندضلعی محدب است؛ اگر هر پاره‌خطی که دو نقطه‌ی دلخواهِ درون آن چندضلعی را به هم وصل می‌کند، به‌طور کامل درون آن چندضلعی قرار بگیرد.» هر چندضلعی که محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص‌های سه دانش‌آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی‌های زیر و دلایلی که ارائه کرده‌اند، با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید. نرگس: چندضلعی مقابل محدب نیست؛ زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند، به‌طور کامل در آن قرار نمی‌گیرد. مهدیه: چندضلعی مقابل محدب است؛ زیرا نقاط T و S درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند، نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد. مریم: چندضلعی مقابل محدب است؛ زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند، نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.

- **نرگس:** درست است. طبق تعریف، پیدا شدن فقط یک جفت نقطه‌ی درونی که پاره‌خط بین آنها از چندضلعی بیرون می‌زند، برای مقعر بودن کافی است (مثال نقض).
- **مهدیه:** دلیل او نادرست است. برای محدب بودن باید برای «هر» دو نقطه‌ی دلخواه پاره‌خط درون چندضلعی باشد؛ بررسی یک جفت نقطه کافی نیست (ممکن است جفت دیگری مثال نقض باشد).
- **مریم:** دلیل او هم نادرست است و به همان دلیل: یک جفت نقطه برای نتیجه‌ی کلی کافی نیست.

اگر چندضلعی‌های مهدیه و مریم واقعاً مقعر باشند، تشخیص (محدب) نیز نادرست است؛ و اگر محدب باشند، نتیجه درست ولی دلیل ناکافی است.

چندضلعی‌ها دیده نشد؛ داوری درباره‌ی تشخیص هر دانش‌آموز بر پایه‌ی منطق تعریف است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸۶ صفحه ۴۴ تمرین

۳ــ آیا استدلال‌های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید. الف) چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. ⇐ ABCD مستطیل است. هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است. ب) همه‌ی ضلع‌های ABCD، با هم برابر نیستند. ⇐ ABCD مربع نیست. در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند. ج) در چهارضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند. ⇐ ABCD مربع نیست. در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.

- الف) نادرست؛ از «هر مستطیل متوازی‌الاضلاع است» نمی‌توان نتیجه گرفت «هر متوازی‌الاضلاع مستطیل است» (عکس حکم درست نیست؛ مثلاً لوزی غیرمربع متوازی‌الاضلاع است ولی مستطیل نیست).
- ب) درست؛ اگر ABCD مربع بود، همه‌ی ضلع‌هایش برابر می‌شدند. چون برابر نیستند، مربع نیست.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- ج) درست؛ به همان دلیل (ویژگی لازم مربع بودن را ندارد، پس مربع نیست).

۸۷ صفحه ۴۴ تمرین

۴ــ ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یادآوری: فاصله‌ی یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر خط عمود می‌شود. راهنمایی: یک زاویه‌ی دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصله‌ی این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس دلیل آن را که این نتیجه برای همه‌ی نقاطِ روی نیمساز درست است، بیان کنید.

زاویه‌ی $x\hat{O}y$ با نیمساز Oz و نقطه‌ی دلخواه P روی آن را در نظر می‌گیریم. از P بر دو ضلع عمود می‌کنیم: $PH \perp Ox$ و $PK \perp Oy$.

- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (Oz نیمساز است)
- $\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$
- $OP = OP$ (وتر مشترک)

دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OPH و OPK به حالت (وتر و یک زاویه‌ی حاده) همنهشت‌اند؛ پس $PH = PK$ ، یعنی P از دو ضلع به یک فاصله است.

چون P نقطه‌ی دلخواه روی نیمساز بود و در اثبات فقط از «روی نیمساز بودن P» استفاده کردیم (نه از جای خاص آن)، نتیجه برای همه‌ی نقاط نیمساز درست است.

۸۸ صفحه ۴۵ فعالیت

با مفهوم همنهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه‌نویسی کنیم؛ مثلاً حالت همنهشتی (ض ز ض) را این‌گونه نمایش می‌دهیم: $AB = A'B'$ ، $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $AC = A'C' \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. برای یادآوری، دو حالت دیگر همنهشتی مثلث‌ها و دو حالت همنهشتی ویژه‌ی مثلث‌های قائم‌الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

- حالت (ز ض ز): $\hat{B} = \hat{B}'$ ، $BC = B'C'$ ، $\hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$
- حالت (ض ض ض): $AB = A'B'$ ، $BC = B'C'$ ، $AC = A'C' \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$
- قائم‌الزاویه (وتر و یک زاویه‌ی حاده): $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$ ، $BC = B'C'$ ، $\hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$
- قائم‌الزاویه (وتر و یک ضلع): $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$ ، $BC = B'C'$ ، $AB = A'B' \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

۸۹ صفحه ۴۵ فعالیت

۱ــ در شکل‌های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر همنهشت‌اند. اندازه‌ی پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید.

۲ــ در شکل زیر چهار مثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر همنهشت‌اند. ابتدا مثلث‌های همنهشت را مشخص کنید و سپس اندازه‌های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده با هم مساوی است).

در دو مثلث همنهشت، ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر برابرند؛ پس هر «؟» برابر جزء متناظر خود در مثلث دیگر است (زاویه‌ی ۴۰ همان ۴۰، ضلع ۳ همان ۳ و...). زاویه‌ی سوم را از جمع ۱۸۰ به‌دست می‌آوریم.

- اگر زاویه‌های ۴۵ و ۶۰ معلوم باشد، زاویه‌ی سوم $180 - 45 - 60 = 75$
- در مثلث‌های همنهشت ضلع‌های نظیر برابرند، مثلاً ضلع‌های ۸ و ۸ و ۱۳ و ۱۳ با یکدیگر متناظرند (به ترتیب مقدار روی شکل).
- از مثلث‌های داده‌شده، دو مثلث را که اضلاع (۱۳، ۱۳، ۸ و...) یا زاویه‌های (۶۰، ۱۲۰) یکسان دارند جفت می‌کنیم و مجهول را از مثلث دیگر می‌خوانیم.

شکل‌ها و عددهای روی آنها در متن به‌هم‌ریخته بود؛ فقط روش و مقدارهای محتمل نوشته شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۰ صفحه ۴۶ فعالیت

مثال: با رحل‌های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. در نمونه‌ای از آنها دو لایه‌ی چوبی آن از وسط یکدیگر گذشته است. می‌خواهیم نشان دهیم که این تکیه‌گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصله‌ی دو لبه‌ی کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است: OB = OA و OD = OC (چرا؟) و حکم این است: AD = BC. زوایای $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند (چرا؟)، پس مثلث‌های OAD و OBC همنهشت هستند و از آنجا درستی حکم به‌دست می‌آید؛ یعنی: ΔOBC ⇒ ___ = OC ، $\hat{O}_1$ = ___ ، ___ = OA $\Delta OAD \Rightarrow AD = BC$ ≅

- چرا OA = OB و OC = OD ؟ چون دو لایه‌ی چوبی هم‌اندازه‌اند و از وسط یکدیگر گذشته‌اند، پس O وسط هر دو است.
- چرا $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ؟ چون دو زاویه متقابل به رأس‌اند.

تکمیل: OA = OB ، $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ، OC = OD ⇒ $\Delta OAD \cong \Delta OBC$ (ض ز ض) ⇒ AD = BC (اجزای متناظر).

۹۱ صفحه ۴۶ **فعالیت**

در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، بوستانی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم‌دایره وجود دارد؛ بچه‌ها برای بازی از پله‌های آن بالا می‌روند. می‌دانیم فاصله‌ی ابتدای پل (نقطه‌ی A) از انتهای آن (نقطه‌ی B) ۱۰ متر است. ترانه روی پله‌ی C نشسته است که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد (BC = ۶) و شهرزاد روی پله‌ی D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می‌زنند که باید فاصله‌شان از پایه‌های مقابل برابر باشد؛ یعنی BD = AC. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.

۱ــ نشان دهید زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ در شکل، قائمه است. طول‌های AC و BD را به کمک قضیه‌ی فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: BD = AC.

۲ــ به کمک همنهشتی مثلث‌های ACB و ADB، نشان دهید BD = AC.

AB قطر نیم‌دایره است (AB = 10) و AD = BC = 6. هر زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر، ۹۰ درجه است؛ پس $\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$.

روش ۱: فیثاغورس

- $AC = 8 \Rightarrow AC^2 = AB^2 - BC^2 = 100 - 36 = 64$
- $BD = 8 \Rightarrow BD^2 = AB^2 - AD^2 = 100 - 36 = 64$
- پس BD = AC.

روش ۲: همنهشتی

در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ACB و ADB: وتر AB مشترک است و BC = AD = 6؛ پس به حالت (وتر و یک ضلع) همنهشت‌اند: $\Delta BDA \cong \Delta ACB$ و از اجزای متناظر BD = AC.

۹۲ صفحه ۴۷ **فعالیت**

در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های ضلع‌های CD و CB هستند. می‌خواهیم نشان دهیم ۱. $\Delta ABN \cong \Delta ADM$ــ با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید: فرض: AB = AD = ____ = ____ ، DM = ____ ، $\hat{B}$ = ____ ، $\hat{A}$ = ____ ، BN = ____ حکم: ۲ $\Delta ABN \cong \Delta ADM$ــ با توجه به نتیجه‌ی قسمت (۱) و تساوی‌های قسمت اول، ثابت کنید مثلث‌های ABN و ADM همنهشت‌اند. ۳ــ حال با توجه به همنهشتی دو مثلث ABN و ADM، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

۱

- AD = AB = BC = CD (چهار ضلع لوزی برابرند)
- BN = ½BC و DM = ½CD ⇒ BN = DM

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- $\hat{D} = \hat{B}$ (زاویه‌های روبه‌رو در لوزی برابرند)

۲

$\Delta ABN \cong \Delta ADM \Rightarrow BN = DM \, ، \, \hat{B} = \hat{D} \, ، \, AB = AD$ (ض ز ض).

۳

- $\angle ANB = \angle AMD \, ، \, \angle BAN = \angle DAM \, ، \, AN = AM$

برخی جاهای خالی تساوی‌ها (زاویه‌ها) در متن خوانا نبود؛ نسخه‌ی مناسب برای اثبات نوشته شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۳ صفحه ۴۷ کار در کلاس

می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع، مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابرند. مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ نظر دو دانش‌آموز را درباره‌ی این مسئله ببینید و به سؤال‌های مطرح‌شده پاسخ دهید. شهرزاد: معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی است؛ با چشم هم می‌توان دید! ترانه: به نظر من باید دو مثلث هم‌نهشت بیابیم و با اثبات همنهشتی آنها به برابری اضلاع در متوازی‌الاضلاع برسیم؛ اما در شکل مقابل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطرها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم. شبنم: می‌دانیم که در تعریف متوازی‌الاضلاع، برابری ضلع‌های روبه‌رو آورده شده است. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم. • آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟ • به تعریف متوازی‌الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟

- فرض: ABCD متوازی‌الاضلاع است؛ یعنی $AB \parallel CD$ و $AD \parallel BC$
- حکم: $AB = CD$ و $AD = BC$

خیر؛ نمی‌توان فقط به چشم اعتماد کرد (خطای دید و خطای اندازه‌گیری). نظر ترانه درست است.

در تعریف متوازی‌الاضلاع (چهارضلعی که ضلع‌های روبه‌رویش موازی‌اند) فقط موازی بودن ضلع‌ها آمده است، نه برابری آنها؛ پس نظر شبنم درباره‌ی «آوردن در تعریف» درست نیست. اندازه‌گیری هم فقط برای همان شکل و به‌طور تقریبی برابری را نشان می‌دهد و حکم کلی را ثابت نمی‌کند.

۹۴ صفحه ۴۸ کار در کلاس

اثبات را به‌صورت زیر کامل کنید: $AB \parallel CD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (مورب) و $AD \parallel BC \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2$ (مورب) $BD = BD$ (ضلع مشترک) $\Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta CBD$ (ز ض ز) $\Rightarrow AD = BC \, , \, AB = CD$ با توجه به همنهشتی دو مثلث ABD و CBD،

تساوی‌های زیر را کامل کنید. دیدیم که $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ است؛ بنابراین داریم: AD = ____ و $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$ است؛ بنابراین داریم: AB = ____ • چرا برای اثبات همنهشتی مثلث‌های ایجادشده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ز ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟ • با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر AC به‌دست آوریم؟

قطر BD را رسم می‌کنیم؛ زاویه‌های متناوب داخلی برابرند:

- $AB \parallel CD$ و BD مورب $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$
- $AD \parallel BC$ و BD مورب $\Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2$
- $BD = BD$ (ضلع مشترک)
- $\Delta ABD \cong \Delta CBD \Rightarrow$ (ز ض ز) و $AD = BC$ و $AB = CD$ (اجزای متناظر)

تکمیل: $AD = CB$ و $AB = CD$.

چرا (ض ز ض) و (ض ض ض) نه؟ چون از فرض فقط موازی بودن ضلع‌ها را می‌دانیم و از اندازه‌ی ضلع‌ها هیچ‌چیز معلوم نیست؛ در دو مثلث فقط یک ضلع (قطر BD) مشترک و برابر است، پس دو یا سه ضلع برابر نداریم.

بله؛ با رسم قطر AC و برابری زاویه‌های متناوب داخلی، مثلث‌های ABC و CDA همنهشت می‌شوند و همان نتیجه به‌دست می‌آید (ویژگی‌های به‌کاررفته برای هر دو قطر برقرار است؛ تعمیم).

۹۵ صفحه ۴۹ **کار در کلاس**

از همنهشتی مثلث‌های ایجادشده در متوازی‌الاضلاع، به‌جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجه‌ی دیگری هم درباره‌ی زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید؛ این نتیجه را بنویسید. در هر متوازی‌الاضلاع _____ روبه‌رو، مساوی‌اند.

از همنهشتی $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ نتیجه می‌شود $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = \hat{D}$.

در هر متوازی‌الاضلاع **زاویه‌های** روبه‌رو مساوی‌اند.

۹۶ صفحه ۴۹ **تمرین**

۱ــ ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید: OA = OC و OB = OD.

۲ــ ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است!)

۱

ABCD متوازی‌الاضلاع و O برخورد قطرها است. دو مثلث OAB و OCD:

- AB = CD (ضلع‌های مقابل)
- ∠OAB = ∠OCD و ∠OBA = ∠ODC (متناوب داخلی، AB ∥ CD)
- پس ΔOAB ≅ ΔOCD (ز ض ز) ⇒ OA = OC و OB = OD.

۲

مستطیل متوازی‌الاضلاع است؛ پس AD = BC. دو مثلث ABD و BAC:

- AD = BC
- ∠DAB = ∠ABC = 90°
- AB = AB (ضلع مشترک)
- ⇒ ΔBAC ≅ ΔABD (ض ز ض) ⇒ BD = AC.

۹۷ صفحه ۴۹ تمرین

۳ــ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی همنهشت‌اند؟ چرا AM نیمساز زاویه‌ی Â است؟ چرا AM بر BC عمود است؟

- AB = AC (ساق‌ها) ، BM = MC (AM میانه است) ، AM = AM (مشترک) ⇒ ΔAMB ≅ ΔAMC به حالت (ض ض ض).
- از همنهشتی، زاویه‌های متناظر برابرند: ∠BAM = ∠CAM ؛ پس AM نیمساز زاویه‌ی Â است.
- همچنین ∠AMB = ∠AMC و این دو زاویه روی یک خط‌اند: ∠AMB + ∠AMC = 180° ⇒ هر کدام ۹۰ درجه؛ پس AM ⊥ BC.

۹۸ صفحه ۴۹ تمرین

۴ــ از نقطه‌ی M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کرده‌ایم. آیا اندازه‌ی این دو مماس با هم برابر است؟ درستی ادعای خود را نشان دهید. (راهنمایی: از مرکز دایره به نقطه‌های A ، M و B وصل کنید.)

بله، MA = MB. شعاع‌های OA و OB را رسم می‌کنیم و OM را وصل می‌کنیم. شعاع در نقطه‌ی تماس بر مماس عمود است: OA ⊥ MA و OB ⊥ MB.

- Â = B̂ = 90°
- OA = OB (شعاع‌ها)
- OM = OM (وتر مشترک)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

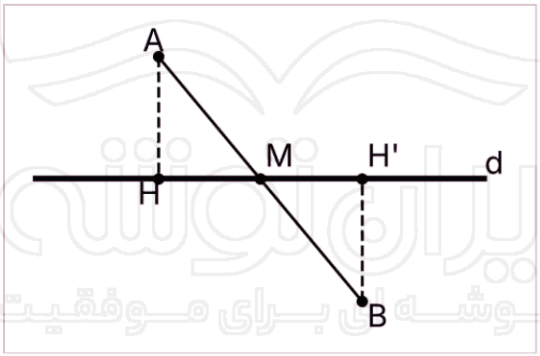
مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OAM و OBM به حالت (وتر و یک ضلع) همنهشت‌اند؛ پس MA = MB.

۹۹ صفحه ۵۰ فعالیت

مثال: دو روستای A و B با یک جاده‌ی خاکی مستقیم به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جاده‌ی آسفالته‌ی مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شد و جاده‌ی آسفالته درست از وسط جاده‌ی خاکی عبور می‌کرد. اداره‌ی راه‌سازی تصمیم گرفته است که از هر روستا، یک جاده‌ی آسفالته با کوتاه‌ترین فاصله‌ی ممکن تا جاده‌ی اصلی بسازد. بنابراین از روستای A یک جاده‌ی مستقیم، عمود بر این جاده‌ی اصلی و به طول چهار کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه‌های ساخت جاده‌ی دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصله‌ی روستای B از جاده نیز همین مقدار است؛ یعنی $BH' = AH$. قدم‌های حل مسئله: ۱ــ صورت مسئله را به‌دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل‌دهنده‌ی آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره‌خط و فاصله‌ی نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟ ۲ــ اگر مسئله فاقد شکل است، با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید. در اینجا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم کنید.

بله؛ خط (جاده‌ی اصلی d)، پاره‌خط (جاده‌ی خاکی AB و عمودها) و فاصله‌ی نقطه تا خط (طول عمودی که از نقطه بر خط فرود می‌آید).

شکل: جاده‌ی خاکی AB از وسط M جاده‌ی اصلی d می‌گذرد؛ از A عمود AH و از B عمود BH' بر d رسم می‌کنیم.



۱۰۰ صفحه ۵۱ فعالیت

۳ــ داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص دهید و در یک جدول بنویسید. در اینجا فرض‌های اصلی این است که M وسط AB است؛ یعنی MB = MA است و AH و BH' بر d عمودند و حکم این است: $BH' = AH$. ۴ــ برای رسیدن از فرض به حکم، راه‌حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این‌کار هست که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره‌خط، استفاده از مثلث‌های همنهشت است. در

این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟ با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید: $\hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ$ ، $MA = MB$ ، ____ = ____ (چرا؟) $\Rightarrow AH = BH \Rightarrow \Delta AHM \cong \Delta BH'M$

جدول فرض و حکم

فرض	حکم
$MA = MB$ ، $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ (AH و BH' بر d عمودند)	$BH' = AH$

مثلث‌های مناسب: مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AHM و $BH'M$.

- $MA = MB$ (فرض، وتر)
- $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ (فرض)
- $\angle AMH = \angle BMH'$ (زاویه‌های متقابل به رأس، حاده)
- پس $\Delta AHM \cong \Delta BH'M$ (وتر و یک زاویه‌ی حاده) $\Rightarrow AH = BH'$ (تساوی اجزای متناظر).

۱۰۱ صفحه ۵۱ کار در کلاس

۱ــ در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی‌اند. نشان دهید کمان‌های AB و CD مساوی‌اند. ۲ــ در شکل مقابل کمان‌های AB و CD مساوی‌اند. نشان دهید وترهای AB و CD با هم برابرند. (در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.)

۱

O مرکز دایره است. دو مثلث OAB و OCD:

- $OA = OB = OC = OD$ (شعاع)
- $AB = CD$ (فرض)
- $\Delta OAB \cong \Delta OCD \Rightarrow$ (ض ض ض) $\angle AOB = \angle COD$.

زاویه‌های مرکزی برابر ⇒ کمان‌های روبه‌رو برابرند: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

۲

کمان‌های برابر زاویه‌های مرکزی برابر دارند: $\angle AOB = \angle COD$. در مثلث‌های OAB و OCD:

- $OA = OC$ ، $OB = OD$ (شعاع‌ها)
- $\angle AOB = \angle COD$
- $\Delta OAB \cong \Delta OCD \Rightarrow$ (ض ز ض) $AB = CD$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

شکل دیده نشد؛ فرض شده O مرکز دایره است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۲ صفحه ۵۲ کار در کلاس

در شکل مقابل می‌دانیم ۱. AB = CD ــ چرا AC = BD؟ ۲ــ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید: AB = ۳ ____ ⇒ AB + BC = CD + BC ، BC = BC ــ چرا CD = AC؟

نقطه‌های A و B و C و D به این ترتیب روی یک خط‌اند (A ، B ، C ، D).

- AB = CD (فرض) و BC = BC (مشترک)
- با جمع دو طرف: AB + BC = CD + BC
- چون AB + BC = AC و CD + BC = BD ⇒ AC = BD.

(حاصل جمع مقدارهای برابر با یک مقدار یکسان، برابر است.)

ترتیب نقطه‌ها و شکل دیده نشد؛ فرض شده نقطه‌ها روی یک خط و به ترتیب A, B, C, Dاند. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۳ صفحه ۵۲ تمرین

۱ــ در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و M و N و P و Q وسط‌های ضلع‌های متوازی‌الاضلاع‌اند، ثابت کنید: PQ = MN

فرض کنیم M وسط AB ، N وسط BC ، P وسط CD و Q وسط DA است. دو مثلث BMN و DPQ:

- BM = ½AB = ½CD = DP (ضلع‌های مقابل برابرند)
- BN = ½BC = ½AD = DQ
- $\hat{B} = \hat{D}$ (زاویه‌های روبه‌روی متوازی‌الاضلاع)
- ΔBMN ≅ ΔDPQ ⇒ MN = PQ (ض ز ض).

نام‌گذاری M, N, P, Q روی شکل دیده نشد؛ ترتیب فرض شد (با هر ترتیب دیگر نیز همین روش با دو مثلث گوشه‌ی مقابل کار می‌کند). این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
تو شه‌ای برای موفقیت

۱۰۴ صفحه ۵۲ تمرین

۲ــ در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس‌اند، نشان دهید که AD و BC برابرند.

فرض (طبق شکل): A و B نقطه‌های تماس‌اند، D و O و C روی یک خط‌اند. دو مثلث OAD و OBC:

- OA = OB (شعاع)
- $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ (شعاع بر مماس در نقطه‌ی تماس عمود است)
- $\angle AOD = \angle BOC$ (متقابل به رأس)
- $\Delta OAD \cong \Delta OBC \Rightarrow$ (ز ض ز) $\Rightarrow AD = BC$.

شکل دیده نشد؛ نقش نقطه‌ها (تماس و راستای DC) حدس زده شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۵ صفحه ۵۲ تمرین

۳ــ در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الساقین است و M و N روی قاعده‌ی BC طوری قرار دارند که NC = BM. نشان دهید مثلث AMN هم متساوی‌الساقین است.

ABC متساوی‌الساقین با AB = AC است؛ پس $\hat{B} = \hat{C}$. دو مثلث ABM و ACN:

- AB = AC (ساق‌ها)
- $\hat{B} = \hat{C}$ (زاویه‌های مجاور قاعده)
- BM = CN (فرض)
- $\Delta ABM \cong \Delta ACN \Rightarrow$ (ض ز ض) $\Rightarrow AM = AN$.

پس مثلث AMN متساوی‌الساقین است.

۱۰۶ صفحه ۵۳ تمرین

۴ــ در مستطیل ABCD، پاره‌خط‌های BE و AF طوری رسم شده که دو زاویه‌ی $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ برابرند. ثابت کنید BE و AF مساوی‌اند.

زاویه‌های $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ را زاویه‌های DAF و CBE می‌گیریم. دو مثلث ADF و BCE:

- AD = BC (ضلع‌های روبه‌روی مستطیل)
- $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$
- $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (فرض)
- $\Delta ADF \cong \Delta BCE \Rightarrow$ (ز ض ز) $\Rightarrow AF = BE$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

جای دقیق زاویه‌های $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ روی شکل دیده نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۷ صفحه ۵۳ تمرین

۵ــ نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین، فاصله‌ی هر نقطه‌ی دلخواه روی نیمساز زاویه‌ی رأس، از دو سر قاعده، برابر است: MB = MC.

ABC متساوی‌الساقین (AB = AC) و M نقطه‌ی دلخواه روی نیمساز $\hat{A}$ است. دو مثلث ABM و ACM:

- AB = AC (ساق‌ها)
- $\angle BAM = \angle CAM$ (AM نیمساز است)
- AM = AM (ضلع مشترک)
- $\Delta ABM \cong \Delta ACM \Rightarrow$ (ض ز ض) $\Rightarrow MB = MC$.

چون M دلخواه بود، برای هر نقطه‌ی نیمساز برقرار است.

۱۰۸ صفحه ۵۴ فعالیت

ــ در تصویرهای زیر، دو گل شبیه هم را می‌بینید. آیا هر دو گل به‌طور کامل مثل هم‌اند؟

ــ در تصویرهای زیر دو عکس از یک کودک را می‌بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟

ــ تصویرهای زیر، عکس‌هایی از میدان آزادی تهران است. کدام‌یک به برج آزادی شبیه‌تر است؟

- خیر؛ دو گل شکل و رنگ مشابه دارند ولی کاملاً یکسان نیستند (اندازه و جزئیات فرق می‌کند).
- دو عکس از یک شکل‌اند ولی اندازه‌شان فرق دارد (یکی بزرگ‌تر شده است)؛ شکل و نسبت‌ها یکسان است.
- عکسی که نسبت طول و عرض برج در آن تغییر نکرده (کشیده یا فشرده نشده)، شبیه‌تر است؛ یعنی فقط اندازه‌ی آن بزرگ یا کوچک شده است.

تصویرها دیده نشد؛ پاسخ‌ها بر پایه‌ی مفهوم شباهت نوشته شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۹ صفحه ۵۵ فعالیت

۱ــ مربع‌های صفحه‌ی شطرنجی زیر به ضلع یک سانتی‌متر است: اندازه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید: چه رابطه‌ای بین ضلع‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟ چه رابطه‌ای بین زاویه‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟ اندازه‌ی ضلع‌های شکل (۱) چند برابر اندازه‌ی ضلع‌های شکل (۲) است؟ در صفحه‌ی شطرنجی

مقابل یک چندضلعی رسم کنید و چندضلعی دیگری مانند آن بکشید؛ به‌طوری که اندازه‌ی ضلع‌هایش ۲ برابر شکل اول باشد.

۲ــ در تصویر زیر، نقشه‌ی قسمتی از شهر تهران را می‌بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است؛ یعنی هر یک سانتی‌متر روی نقشه با ۱۰۰,۰۰۰ سانتی‌متر مقدار واقعی برابر است. فاصله‌ی دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید.

۱

- رابطه‌ی ضلع‌های متناظر: همه‌ی ضلع‌های شکل (۲) با یک نسبت ثابت از ضلع‌های متناظرشان در شکل (۱) بزرگ‌تر (یا کوچک‌تر) شده‌اند؛ یعنی نسبت ضلع‌های متناظر برابر است.
- رابطه‌ی زاویه‌های متناظر: زاویه‌های متناظر دو شکل با هم برابرند.
- نسبت ضلع‌ها را با تقسیم هر ضلع شکل (۱) بر ضلع متناظر در شکل (۲) می‌یابیم؛ برای همه‌ی ضلع‌ها یک عدد ثابت به‌دست می‌آید.
- برای رسم: طول هر ضلع را روی خانه‌های شطرنجی دو برابر می‌کنیم (مثلاً ضلعی با ۳ خانه، ۶ خانه شود) و زاویه‌ها را نگه می‌داریم.

۲

فاصله‌ی دو میدان را روی نقشه با خط‌کش اندازه می‌گیریم؛ اگر حدود 5 cm باشد، فاصله‌ی واقعی 5 × 100000 = 500000 cm = 5 km است. (هر ۱ سانتی‌متر روی نقشه ۱ کیلومتر در واقعیت است.)

شکل‌ها و فاصله‌ی اندازه‌گیری‌شده روی نقشه دیده نشد؛ عدد ۵ سانتی‌متر تخمینی است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۰ صفحه ۵۶ فعالیت

۳ــ شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده‌ایم. عدد روی دستگاه ٪۵۰ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید. (هرگاه در دو چندضلعی همه‌ی ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، یا بدون تغییر باشد) و اندازه‌ی زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، آن دو چندضلعی با هم متشابه‌اند.)

٪۵۰ یعنی همه‌ی طول‌ها نصف می‌شوند و زاویه‌ها ثابت می‌مانند. پس تصویر خروجی شکلی هم‌شکل با شکل داده‌شده است که طول هر ضلعش نصف ضلع متناظر در شکل اصلی است (و مساحتش یک‌چهارم).

شکل دیده نشد؛ فقط ویژگی‌های تصویر نوشته شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۱ صفحه ۵۶ کار در کلاس

۱ــ آیا دو مربع زیر متشابه‌اند؟ اندازه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟ آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابه‌اند؟ چرا؟

بله؛ هر چهار زاویه‌ی هر مربع ۹۰ درجه است (زاویه‌ها برابر) و اگر ضلع مربع اول a و ضلع مربع دوم b باشد، نسبت هر چهار ضلع متناظر برابر است: a/b.

پس هر دو مربع دلخواه متشابه‌اند؛ زیرا زاویه‌های متناظر همیشه برابر (°۹۰) و ضلع‌های هر مربع همه برابرند، در نتیجه نسبت ضلع‌های متناظر یکسان است.

اندازه‌ی مربع‌ها در شکل دیده نشد؛ پاسخ کلی است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۲ صفحه ۵۷ کار در کلاس

۱ــ با توجه به مربع صفحه‌ی بعد، مربع دیگری رسم کنید؛ به‌گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع ۱/۲ باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟

ضلع مربع جدید را نصف ضلع مربع داده‌شده می‌گیریم (اگر نسبت از مربع داده‌شده به مربع جدید باشد، ضلع جدید دو برابر می‌شود). چون 1/2 نسبت ضلع‌هاست و زاویه‌ها همه °۹۰ است، دو مربع متشابه‌اند.

این سؤال بی‌شمار پاسخ دارد؛ زیرا اندازه‌ی ضلع مربع جدید معلوم است ولی مکان و وضعیت رسم آن روی صفحه دلخواه است (هر مربعی با همان ضلع، پاسخ است).

مربع صفحه‌ی بعد دیده نشد؛ جهت نسبت به متن اتکا دارد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۳ صفحه ۵۷ فعالیت

دو مثلث زیر با هم متشابه‌اند. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را هم‌رنگ کنید. نسبت ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به‌دست آمد؟ (مثلث ABC با ضلع‌های ۸ و ۶ و ۱۰ و مثلث DEF با ضلع‌های ۵ و ۴ و ۳)

ضلع‌های متناظر را از کوچک به بزرگ جفت می‌کنیم؛ مثلث‌ها قائم‌الزاویه‌اند (۳، ۴، ۵) و (۶، ۸، ۱۰) :

DEF ضلع مثلث	ABC ضلع متناظر مثلث	نسبت
۳	۶	6/3 = 2
۴	۸	8/4 = 2
۵	۱۰	10/5 = 2

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

بله؛ سه کسر برابر ۲ شد: نسبت تشابه ۲ (یا ½ اگر برعکس نوشته شود). زاویه‌های متناظر با هم برابرند (زاویه‌ی ۹۰ درجه روبه‌روی بزرگ‌ترین ضلع).

نام‌گذاری رأس‌ها در شکل دیده نشد؛ بر پایه‌ی طول ضلع‌ها جفت شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۴ صفحه ۵۷ فعالیت

۲ــ از مستطیل‌های زیر کدام با هم متشابه‌اند؟ چرا؟ آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه‌اند؟

همه‌ی زاویه‌های مستطیل ۹۰ درجه است، پس زاویه‌ها همواره برابرند؛ دو مستطیل وقتی متشابه‌اند که نسبت طول به طول و عرض به عرض برابر باشد ($a/a' = b/b'$).

هر دو مستطیل دلخواه متشابه نیستند؛ مثلاً مستطیل 4 × 2 و مستطیل 6 × 2 زاویه‌های برابر دارند ولی $2/2 \neq 4/6$؛ پس متشابه نیستند. (مثلاً دو مستطیل ۲×۴ و ۳×۶ متشابه‌اند.)

ابعاد مستطیل‌ها در شکل دیده نشد؛ فقط معیار تشابه نوشته شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۵ صفحه ۵۸ کار در کلاس

۲ــ در صفحه‌ی مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید: مثلث $A = (۱ , ۲)$ ، $B = (۱ , ۰)$ ، $C = (۳ , ۰)$:ABC مثلث $A'B'C'$ $C' = (۷ , ۲)$ ، $B' = (۳ , ۶)$ ، $A' = (۳ , ۲)$ طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

ضلع‌های مثلث ABC:

- $AB = 2$ (قائم) ، $BC = 2$ (افقی) ، $AC = \sqrt{(2^2+2^2)} = 2\sqrt{2}$

ضلع‌های مثلث $A'B'C'$:

- $A'B' = 4$ ، $A'C' = 4$ ، $B'C' = \sqrt{(4^2+4^2)} = 4\sqrt{2}$

نسبت ضلع‌های متناظر: $4/2 = 4/2 = 4\sqrt{2}/2\sqrt{2} = 2$ ؛ سه نسبت برابرند، پس دو مثلث متشابه‌اند (هر دو قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین) و نسبت تشابه ۲ است (از ABC به $A'B'C'$).

۱۱۶ صفحه ۵۸ تمرین

۱ــ آیا هر دو شکل همنهشت با هم، متشابه نیز هستند؟ در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟

بله؛ در دو شکل همنهشت، ضلع‌های متناظر برابر و زاویه‌های متناظر برابرند، پس نسبت ضلع‌ها ثابت (برابر ۱) و دو شکل متشابه‌اند. نسبت تشابه ۱ است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۱۷ صفحه ۵۸ تمرین

۲ــ آیا هر دو لوزی متشابه‌اند؟ چرا؟

خیر. ضلع‌های هر لوزی برابرند (نسبت ضلع‌ها ثابت می‌شود) ولی زاویه‌ها لزوماً برابر نیستند. مثلاً مربع (زاویه‌های ۹۰) و لوزی با زاویه‌های ۶۰ و ۱۲۰ را با ضلع یکسان در نظر بگیرید؛ ضلع‌ها برابرند ولی زاویه‌ها متفاوت‌اند، پس متشابه نیستند.

۱۱۸ صفحه ۵۸ تمرین

۳ــ در یک نقشه، مقیاس ۱:۲۰۰ است. فاصله‌ی دو نقطه روی نقشه ۳/۵ سانتی‌متر است. فاصله‌ی این دو نقطه در اندازه‌ی واقعی چقدر است؟

$3.5 \times 200 = 700\ cm = 7\ m$ ؛ فاصله‌ی واقعی ۷ متر است.

۱۱۹ صفحه ۵۸ تمرین

۴ــ آیا هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع متشابه‌اند؟ چرا؟

۵ــ آیا هر دو مثلث متساوی‌الساقین متشابه‌اند؟ چرا؟

۴

بله؛ هر زاویه‌ی مثلث متساوی‌الاضلاع ۶۰ درجه است (زاویه‌های متناظر برابر) و اگر ضلع‌ها a و b باشند، نسبت هر سه ضلع متناظر a/b است.

۵

خیر؛ زاویه‌های مثلث‌های متساوی‌الساقین می‌توانند متفاوت باشند. مثلاً مثلثی با زاویه‌های ۴۰ و ۴۰ و ۱۰۰ و مثلثی با زاویه‌های ۵۰ و ۵۰ و ۸۰ هر دو متساوی‌الساقین‌اند ولی زاویه‌های متناظرشان برابر نیست، پس متشابه نیستند.

۱۲۰ صفحه ۵۸ تمرین

۶ــ مثلث ABC به ضلع‌های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع $x-1$ و ۱۰ و $x+7$ با هم متشابه‌اند (اندازه‌ی ضلع‌های مثلث‌ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است). مقدار x را پیدا کنید.

ضلع‌های متناظر: $x-1 \leftrightarrow 4$ ، $10 \leftrightarrow 5$ ، $x+7 \leftrightarrow 8$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

نسبت تشابه از $10/5 = 2$ ؛ پس:

- $x - 1 = 2 \times 4 = 8 \Rightarrow x = 9$
- بررسی: $x + 7 = 16 = 2 \times 8$ ✓

$x = 9$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی نهم - فصل چهارم

توان و ریشه

فهرست

۱۲۱ صفحه ۶۱ · فعالیت — توان منفی و جدول توان‌های ۲ ..... ۷۳

۱۲۲ صفحه ۶۲ · کار در کلاس — نوشتن با توان طبیعی (۱) ۷۳

۱۲۳ صفحه ۶۲ · کار در کلاس — وصل کردن عبارت‌های برابر ۷۴

۱۲۴ صفحه ۶۲ · کار در کلاس — ساده کردن عبارت‌های توان‌دار ۷۴

۱۲۵ صفحه ۶۳ · فعالیت — ضرب توان‌ها با توان صحیح ۷۵

۱۲۶ صفحه ۶۳ · کار در کلاس — نوشتن حاصل‌ضرب به‌صورت توان‌دار ۷۵

۱۲۷ صفحه ۶۴ · تمرین — تمرین ۱: تشخیص پاسخ درست ۷۵

۱۲۸ صفحه ۶۴ · کار در کلاس — حاصل را به‌صورت توان‌دار بنویسید ۷۶

۱۲۹ صفحه ۶۵ · تمرین — جرم اتم هیدروژن و وزنه ۷۶

۱۳۰ صفحه ۶۵ · تمرین — مقایسه‌ی $۱۶^{۲}$ و $۸^{۴}$ و $۲^{۱۱}$ ۷۷

۱۳۱ صفحه ۶۵ · تمرین — علامت <، > یا = ... ۷۷

۱۳۲ صفحه ۶۵ · تمرین — پیدا کردن x ۷۷

۱۳۳ صفحه ۶۵ · تمرین — درست یا نادرست ۷۷

۱۳۴ صفحه ۶۵ · تمرین — محاسبه‌ی عبارت‌ها ۷۸

۱۳۵ صفحه ۶۵ · تمرین — مرتب کردن از کوچک به بزرگ ۷۸

۱۳۶ صفحه ۶۵ · تمرین — تشخیص نامساوی نادرست ۷۸

۱۳۷ صفحه ۶۶ · فعالیت — ضرب و تقسیم در توان‌های ۱۰ ..... ۷۹

۱۳۸ صفحه ۶۶ · فعالیت — مسافت نور در ۱۰۰ ساعت ۷۹

۱۳۹ صفحه ۶۷ · کار در کلاس — نمایش با نماد علمی ۸۰

۱۴۰ صفحه ۶۷ · کار در کلاس — نمایش اعشاری عددهای علمی ۸۰

۱۴۱ صفحه ۶۸ · تمرین — درست یا نادرست (نماد علمی) ۸۱

۱۴۲ صفحه ۶۸ · تمرین — نماد علمی شعاع خورشید و باکتری ۸۱

۱۴۳ صفحه ۶۸ · تمرین — قطر خورشید و زمین ۸۱

۱۴۴ صفحه ۶۸ · تمرین — محاسبه با نماد علمی ۸۲

۱۴۵ صفحه ۶۸ · تمرین — نزدیک‌ترین سیاره ۸۲

۱۴۶ صفحه ۶۸ · تمرین — پر کردن جای خالی نامساوی ۸۲

۱۴۷ صفحه ۶۸ · تمرین — مرتب کردن عددهای علمی ۸۲

۱۴۸ صفحه ۶۹ · فعالیت — مربع عددها ۸۳

۱۴۹ صفحه ۶۹ · فعالیت — جدول مربع عددها ۸۳

۱۵۰ صفحه ۶۹ · فعالیت — جدول مکعب عددها ۸۴

۱۵۱ صفحه ۷۰ · کار در کلاس — ریشه‌ی سوم و جای خالی ۸۴

۱۵۲ صفحه ۷۰ · کار در کلاس — طرف دوم تساوی‌های ریشه‌ی سوم ۸۴

۱۵۳ صفحه ۷۰ · کار در کلاس — محاسبه‌ی ریشه‌ها ۸۵

۱۵۴ صفحه ۷۰ · کار در کلاس — رابطه‌ی $\sqrt{(x^{۲})} = |x|$ ۸۶

۱۵۵ صفحه ۷۰ · کار در کلاس — حاصل $\sqrt{x^{۲}+\sqrt{y^{۲}}}$ در حالت‌های مختلف ۸۶

۱۵۶ صفحه ۷۱ · فعالیت — ریشه‌ی سوم حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت ۸۷

۱۵۷ صفحه ۷۱ · کار در کلاس — آیا $\sqrt[3]{۸} + \sqrt[3]{۲۷} = \sqrt[3]{(۸+۲۷)}$؟ ۸۷

۱۵۸ صفحه ۷۲ · تمرین — ریشه‌های دوم ۸۸

۱۵۹ صفحه ۷۲ · تمرین — ریشه‌های سوم ۸۸

۱۶۰ صفحه ۷۲ · تمرین — درست یا نادرست (ریشه‌ها) ۸۹

۱۶۱ صفحه ۷۲ · تمرین — وصل کردن عبارت‌های برابر (رادیکال) ۸۹

۱۶۲ صفحه ۷۲ · تمرین — کامل کردن تساوی‌های رادیکالی ۹۰

۱۶۳ صفحه ۷۳ · تمرین — عدد صحیح a برای نامساوی ۹۰

۱۶۴ صفحه ۷۳ · تمرین — شرط $\sqrt{(x^2)} = -x$ ۹۰

۱۶۵ صفحه ۷۳ · تمرین — حجم مکعب ۹۰

۱۶۶ صفحه ۷۳ · تمرین — ساده کردن $\sqrt{x^2 - \sqrt{y^2}}$ ۹۱

۱۶۷ صفحه ۷۳ · تمرین — ساده کردن رادیکال‌ها (مانند نمونه) ۹۱

۱۶۸ صفحه ۷۳ · تمرین — درستی تساوی‌ها ۹۱

۱۶۹ صفحه ۷۳ · تمرین — ضرب و تقسیم رادیکال‌ها ۹۱

۱۷۰ صفحه ۷۴ · کار در کلاس — قطر و مساحت و محیط مربع ۹۲

۱۷۱ صفحه ۷۴ · فعالیت — جمع ستون‌های رادیکالی ۹۲

۱۷۲ صفحه ۷۵ · فعالیت — ساده کردن عبارت‌های رادیکالی ۹۲

۱۷۳ صفحه ۷۵ · کار در کلاس — چرا حاصل تقسیم برابر ۱ است؟ ۹۳

۱۷۴ صفحه ۷۶ · کار در کلاس — ساده کردن عبارت‌های رادیکالی ۹۳

۱۷۵ صفحه ۷۶ · فعالیت — گویا کردن مخرج ۹۳

۱۷۶ صفحه ۷۶ · کار در کلاس — گویا کردن مخرج کسرها ۹۴

۱۷۷ صفحه ۷۷ · تمرین — ساده کردن عبارت‌ها ۹۴

۱۷۸ صفحه ۷۷ · تمرین — ساده کردن با شرط $x < ۰$ ۹۴

۱۷۹ صفحه ۷۷ · تمرین — محیط و مساحت مربع ۹۵

۱۸۰ صفحه ۷۷ · تمرین — ارتفاع و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ۹۵

۱۸۱ صفحه ۷۷ · تمرین — محیط مربع وسط‌ها ۹۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۱ صفحه ۶۱ **فعالیت**

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤال‌ها پاسخ دهید: (سطر اول: ۳۲ ، ۱۶ ، ۸ ، ۴ ، ۲ ، ۱ ، ½ ، ¼ ، ... ؛ سطر دوم: ۲^۵ ، ۲^۴ ، ۲^۳ ، ۲^۲ ، ۲^۱ ، ۲^۰ ، ...)

الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارند؟

ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟

ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا ۲^۰ با یکدیگر چه رابطه‌ای دارند؟

د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید.

هـ) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید: ۲^-۳ = ... ، ۲^-۴ = ... ، ۲^-۵ = ...

جدول کامل‌شده

سطر اول	۳۲	۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
سطر دوم	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^-1	2^-2	2^-3	2^-4	2^-5

- الف) از راست به چپ هر عدد نصفِ عدد قبلی است (هر عدد برابر قبلی ÷ ۲ است): ۳۲، ۱۶، ۸، ۴، ۲، ۱، ½، ¼، ...
- ب) هر عدد سطر دوم همان عدد بالای آن به‌صورت توانی از ۲ است؛ مثلاً 2^3 = 8 و 2^0 = 1.
- ج) در سطر دوم هر بار که عدد نصف می‌شود، توان ۲ یک واحد کم می‌شود: ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰، ۱-، ۲-، ...
- د) الگو ادامه می‌یابد: 2^-1 = 1/2، 2^-2 = 1/4، 2^-3 = 1/8، 2^-4 = 1/16، 2^-5 = 1/32.
- هـ) 2^-3 = 1/8 = 1/2^3، 2^-4 = 1/16 = 1/2^4، 2^-5 = 1/32 = 1/2^5.

نتیجه: برای عدد ناصفر a و عدد طبیعی n داریم $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

۱۲۲ صفحه ۶۲ **کار در کلاس**

با توجه به مثال‌های حل‌شده‌ی زیر، پاسخ موارد بعدی را به‌صورت یک عدد توان‌دار با توان طبیعی بنویسید:

الف) 2^-5 = ... (نمونه) ب) (2/3)^-2 = ... (نمونه) ج) (-6)^-3 = ... د) (-4/7)^-2 = ...

قاعده: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ ، $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}$

- الف) 5^-2 = 1/5^2 = 1/25 = (1/5)^2
- ب) (2/3)^-2 = (3/2)^2 = 9/4
- ج) (-6)^-3 = 1/(-6)^3 = (-1/6)^3 = -1/216
- د) (-4/7)^-2 = (-7/4)^2 = 49/16

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پایه‌ها و توان‌ها در (ج) و (د) از متن به‌خوبی خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۳ صفحه ۶۲ کار در کلاس

عبارت‌های برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید: ($x \neq 0$ ، $y \neq 0$)

قاعده‌ها: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ، $(xy)^{-1} = \frac{1}{xy}$ ، $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$ ، $xy^{-1} = \frac{x}{y}$

وصل‌ها

عبارت	عبارت برابر
2^-2	$\frac{1}{4}$
x^-1	$\frac{1}{x}$
(xy)^-1	$\frac{1}{xy}$
(-2)^2	۴
$\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$	۵-
x y^-1	$\frac{x}{y}$

عبارت‌های دقیق پرسش در متن استخراج‌شده ناخوانا بود؛ وصل‌ها با قاعده‌ها نوشته شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۴ صفحه ۶۲ کار در کلاس

حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید: (الف تا ی)

- ز) 2^-1 + 3^-1 + 4^-1 = 1/2 + 1/3 + 1/4 = 13/12
- ج) -(-5)^2 = -25
- د) -(-5)^-2 = -1/25
- هـ) -2^-1 = -1/2
- ی) -5^-2 = -1/25
- روش کلی: توان منفی را با وارون پایه به توان مثبت تبدیل و سپس محاسبه کنید؛ مثلاً (3/4)^-1 = 4/3 و (-3)^0 = 1

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فقط بعضی از قسمت‌ها از متن خوانا بود؛ بقیه با همین روش حل می‌شوند. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۵ صفحه ۶۳ فعالیت

به حاصل‌ضرب‌های زیر توجه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حاصل‌ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید: 5^3 × 5^-7 = ...

حاصل‌ضرب	محاسبه	نتیجه
3^4 × 3^-6	3^4 × 1/3^6 = 3^4/3^6 = 1/3^2	3^-2 = 3^(4-6)
2^-2 × 2^-5	1/2^2 × 1/2^5 = 1/2^7	2^-7 = 2^(-2-5)
5^3 × 5^-7	5^3 × 1/5^7 = 1/5^4	5^-4 = 5^(3-7)

نتیجه: برای هر دو عدد صحیح m و n و عدد ناصفر a همان قاعده‌ی توان‌های طبیعی برقرار است:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$.

۱۲۶ صفحه ۶۳ کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید: (x, b, y ≠ ۰)

5^10 × 5^-7 ، (-4)^-1 × (-4)^-9 ، (3/8)^9 × (3/8)^-4 ، (-2)^2 × (-2)^4 ، b^-2 × b^-3 ، (x/y)^-7 × (x/y)^11

- 5^-7 × 5^10 = 5^3
- (-4)^-9 × (-4)^-1 = (-4)^-10
- (3/8)^-4 × (3/8)^9 = (3/8)^5
- (-2)^4 × (-2)^2 = (-2)^6
- b^-2 × b^-3 = b^-5
- (x/y)^-7 × (x/y)^11 = (x/y)^4

عبارت‌های سوم و چهارم از متن به‌خوبی خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۷ صفحه ۶۴ تمرین

برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید. (الف تا و)

- الف) 1/9 = 1/3^2 = 3^-2؛ پاسخ درست ۱/۹ است (نه ۶-، چون توان منفی عدد را منفی نمی‌کند).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- ب) 3 = 1-^(1/3)؛ پاسخ درست ۳ است (وارون ⅓).
- ج) 1/12 = 1/4 × 1/3 = 1-^4 × 1-^3؛ پاسخ درست ۱/۱۲ است نه ۱/۷.
- د) 7/12 = 1/4 + 1/3 = 1-^4 + 1-^3؛ پاسخ درست ۷/۱۲ است نه ۱/۷.
- هـ) 1/25 = 2-^5؛ پاسخ درست ۱/۲۵ است.
- و) 27/8- = 3^(3/2-) = 3-^(2/3-)؛ پاسخ درست ۲۷/۸- است.

عبارت‌ها و پاسخ‌های پیشنهادی از متن استخراج‌شده ناخوانا بود و حدسی بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۸ صفحه ۶۴ **کار در کلاس**

حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت توان‌دار بنویسید. (با رابطه‌ها: a^m × a^n = a^(m+n) ، a^m / a^n = a^(m-n) ، (a^m)^n = a^(mn) ، (ab)^m = a^m b^m)

- الف) 3^5 / 3^7 = 3^(5-7) = 3-^2
- ب) 10^2- = (5×2)^2- = 5^2- × 2^2-
- روش (ج) تا (و): پایه‌های برابر ← توان‌ها جمع یا تفریق می‌شوند؛ توان‌های برابر ← پایه‌ها ضرب یا تقسیم می‌شوند؛ مثلاً 8^4 × 10^6 را ابتدا با پایه‌ی ۲ و ۵ بنویسید.
- و) در عبارت‌های دارای x, y, z برای هر حرف جداگانه توان‌ها را جمع/تفریق می‌کنیم.

فقط (الف) و (ب) از متن خوانا بود؛ (ج) تا (و) به‌صورت روش آمده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱۲۹ صفحه ۶۵ **تمرین**

جرم یک اتم هیدروژن حدود ۲۴-^۱۰ گرم است. جرم یک وزنه‌ی ۱۰۰ کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

۱۰۰ کیلوگرم = ۱۰۰۰۰۰ گرم = 10^5 گرم.

10^29 = 10^(5+24) = 10^5 ÷ 10^-24

یعنی جرم وزنه حدود 10^29 برابر جرم اتم هیدروژن است.

۱۳۰ صفحه ۶۵ تمرین

عددهای 2^16 و 4^8 و 2^11 را با یکدیگر مقایسه کنید.

$2^8 = (2^4)^2 = 2^{16}$ ، $8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$ ، 2^{11}

چون پایه‌ها برابرند، توان بزرگ‌تر عدد بزرگ‌تر است: $8^4 < 2^{11} < 2^{16}$ (یعنی ۲۵۶ < ۲۰۴۸ < ۴۰۹۶).

۱۳۱ صفحه ۶۵ تمرین

در جاهای خالی علامت <، > یا = قرار دهید: الف) $3^{-1} \square 2^{-3}$ ب) $2^0 \square 5^{-2}$ ج) $(0/5)^{-2} \square (0/6)^{-2}$
د) $1^{-5} \square 0$ هـ) $0^{(0/8)} \square 1$ و) $(-5)^{-2} \square -5^{-2}$

- الف) $3^{-1} = 1/3 > 1/9 = 3^{-2}$ ←
- ب) $2^0 = 1 > 1/32 = 2^{-5}$ ←
- ج) $(0/5)^{-2} = 4$ و $(0/6)^{-2} = (5/3)^2 = 25/9 \approx 2/78$ ←
- د) $5^{-1} = 1/5 > 0$ ←
- هـ) $0^{(0/8)} = 1$ ←
- و) $(-5)^{-2} = 1/25 > -1/25 = -5^{-2}$ ←

سمت راست (هـ) از متن به‌خوبی خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳۲ صفحه ۶۵ تمرین

در هر یک از تساوی‌های زیر x چه عددی است؟ الف) $5^4 \div 5^{-3} = x$ ب) $5^{-3} \times x = 5^4$

الف) $x = 5^4 \div 5^{-3} = 5^{(4+3)} = 5^7$ (= ۷۸۱۲۵)

ب) $x = 5^4 \times 5^{-3} = 5^1 = 5$

۱۳۳ صفحه ۶۵ تمرین

کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

- الف) $a^4 \times a^5 = a^{20}$ نادرست؛ توان‌ها جمع می‌شوند: a^9
- ب) $a^4 \times a^5 = a^9$ درست
- ج) $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{(mn)}$ درست؛ هر دو برابر

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

- د) $3^{-2} = -9$ نادرست؛ $3^{-2} = 1/9$
- هـ) $(-3)^0 + (3^{-1})^{-1} = 1 + 3 = 4$ درست
- و) $12^{-2} = 4^{-1} \times 3^{-1}$ نادرست؛ $12^{-1} = 3^{-1} \times 4^{-1}$ و $12^{-2} = 1/144$
- ح) $3^{-10} < 3^{-1}$ نادرست؛ $3^{-10} = 1/59049 < 1/3 = 3^{-1}$
- ز) از متن خوانا نبود.

قسمت (ز) از متن ناخوانا بود و پاسخ داده نشد.

---

۱۳۴ صفحه ۶۵ تمرین

حاصل هر عبارت را به دست آورید. ب) $(0/2)^{-4} \times 25^{-2}$ د) $((-5)^{-2})^{-1}$

ب) $5^{-4} = 25^{-2}$ و $5^4 = (1/5)^{-4} = (0/2)^{-4}$؛ پس $5^4 \times 5^{-4} = 5^0 = 1$

د) $((-5)^{-2})^{-1} = (-5)^2 = 25$

قسمت‌های (الف) و (ج) و شکل دقیق (د) از متن ناخوانا بود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۳۵ صفحه ۶۵ تمرین

عددهای داده‌شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: $(-1)^{21}$, 90^{-1} , 2^{-4} , $(-7)^2$, 2^{-3} , 5^{-3} , 2^3

مقدارها: $90^{-1} \approx 0/0111$ ، $2^{-4} = 0/0625$ ، $(-7)^2 = 49$ ، $2^{-3} = 0/125$ ، $5^{-3} = 0/008$ ، $2^3 = 8$

$(-1)^{21} = -1$

$(-1)^{21} < 5^{-3} < 90^{-1} < 2^{-4} < 2^{-3} < 2^3 < (-7)^2$

بعضی از عددهای فهرست (مانند عدد دارای ½) از متن ناخوانا بود و در ترتیب نیامده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۳۶ صفحه ۶۵ تمرین

عبارت نادرست را مشخص کنید: $10^0 > (0/987)^{10}$ ، $(1/02)^7 > (1/2)^7$ ، $(0/75)^3 < (2/3)^4$

عبارت اول نادرست است؛ $0/987 < 1$ پس هر توان طبیعی آن کمتر از ۱ است: $(0/987)^{10} < 1 = 10^0$.

دومی درست (پایه‌ی بزرگ‌تر، توان یکسان) و سومی درست است: $(0/75)^3 \approx 0/422 < 0/198 \approx (2/3)^4$.

عبارت‌ها از متن به‌خوبی خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳۷ صفحه ۶۶ فعالیت

در جدول زیر تعدادی عدد داده شده و حاصل ضرب آنها در توان‌های ۱۰ یا حاصل تقسیم آنها بر توان‌های ۱۰ خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که هنگام ضرب یا تقسیم، مکان ممیز چگونه تغییر می‌کند؟ (اعداد: ۱۵ ، ۰/۰۲ ، ۹/۳)

ضرب

عدد	×۱۰	×۱۰۰	×۱۰۰۰	×۱۰^۴	×۱۰^۵
۱۵	۱۵۰	۱۵۰۰	۱۵۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰۰
۰/۰۲	۰/۲	۲	۲۰	۲۰۰	۲۰۰۰
۹/۳	۹۳	۹۳۰	۹۳۰۰	۹۳۰۰۰	۹۳۰۰۰۰

تقسیم

عدد	÷۱۰	÷۱۰۰	÷۱۰۰۰	÷۱۰^۴	÷۱۰^۵
۱۵	۱/۵	۰/۱۵	۰/۰۱۵	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۰۱۵
۰/۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰۰۲
۹/۳	۰/۹۳	۰/۰۹۳	۰/۰۰۹۳	۰/۰۰۰۹۳	۰/۰۰۰۰۹۳

توضیح: در ضرب در 10^n ممیز n رقم به راست و در تقسیم بر 10^n ممیز n رقم به چپ می‌رود (در صورت نیاز صفر اضافه می‌شود).

۱۳۸ صفحه ۶۶ فعالیت

سرعت نور ۳۰۰،۰۰۰،۰۰۰ متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در ۱۰۰ ساعت می‌پیماید چند متر است؟ راه حل را کامل کنید و توضیح دهید پاسخ چگونه به دست آمده است.

۱ ساعت = ۳۶۰۰ ثانیه ← ۱۰۰ ساعت = ۳۶۰۰۰۰ ثانیه.

فاصله = 3×10^8 × 360000 = 300000000 × 3/6×10^5

متر. = (3×3/6) × (10^8×10^5) = 10/8 × 10^13 = 1/08 × 10^14

ابتدا هر عدد را به نماد علمی نوشتیم، سپس ضریب‌ها را در هم و توان‌های ۱۰ را با هم جمع‌وار ضرب کردیم، و در پایان حاصل را هم به نماد علمی (ضریب بین ۱ و ۱۰) درآوردیم.

۱۳۹ صفحه ۶۷ کار در کلاس

هر یک از عددهای داده شده را با نماد علمی نمایش دهید: ۲۴۵۰۰۰ ، ۱۵۰۰۰۰۰۰۰ ، ۰/۰۰۵ ، ۰/۰۰۰۰۰۶۱ ، ۱۴۰۴ ، ۰/۱۲۷۵

عدد	نماد علمی
۲۴۵۰۰۰	2/45 × 10^5
۱۵۰۰۰۰۰۰۰	1/5 × 10^8
۰/۰۰۵	5 × 10^−3
۰/۰۰۰۰۰۶۱	6/1 × 10^−5
۱۴۰۴	1/404 × 10^3
۰/۱۲۷۵	1/275 × 10^−1

۱۴۰ صفحه ۶۷ کار در کلاس

نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید: 5/2×10^−3 ، 7/304×10^−5 ، 2/28×10^8 ، 9/4612×10^9 ، 6/02×10^−2 ، 1/1×10^4

نماد علمی	نمایش اعشاری
5/2×10^−3	۰/۰۰۵۲
7/304×10^−5	۰/۰۰۰۰۷۳۰۴
2/28×10^8	۲۲۸۰۰۰۰۰۰
9/4612×10^9	۹۴۶۱۲۰۰۰۰۰
6/02×10^−2	۰/۰۶۰۲
1/1×10^4	۱۱۰۰۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴۱ صفحه ۶۸ تمرین

کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

تساوی	نتیجه	دلیل
1/02×10^-5 = 0/00000102	درست	
5/9×10^-1 = 0/59	درست	
4/3×10^3 = 4300	درست	
7/004×10^-2 = 0/7004	نادرست	= 0/07004
6/18×10^7 = 61800000	درست	
8/2570×10^4 = 82570	درست	

۱۴۲ صفحه ۶۸ تمرین

شعاع خورشید تقریباً ۶۹۵۰۰۰ کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

اندازه‌ی یک باکتری ۰/۰۰۰۰۰۰۵ متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

پرسش ۳

6/95 × 10^5 = 695000 کیلومتر

پرسش ۴

5 × 10^-7 = 0/0000005 متر

۱۴۳ صفحه ۶۸ تمرین

قطر خورشید حدود ۱/۴×۱۰^۹ متر و قطر زمین حدود ۱/۳×۱۰^۷ متر است. قطر خورشید تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

(1/4×10^9) ÷ (1/3×10^7) = (1/4÷1/3) × 10^2 ≈ 1/077 × 10^2 ≈ 108

قطر خورشید تقریباً ۱۰۸ برابر (حدود ۱۰۰ برابر) قطر زمین است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴۴ صفحه ۶۸ تمرین

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و به‌صورت نماد علمی نمایش دهید: $2\times10^{-7}\times4\times10^{9}$ ، $12/5\times10^{-4}\div(25\times10^{-19})$

$2\times10^{-7}\times4\times10^{9}=8\times10^{2}$

$12/5\times10^{-4}\div25\times10^{-19}=(12/5\div25)\times10^{15}=0/5\times10^{15}=5\times10^{14}$

مخرج کسر دوم از متن به‌خوبی خوانا نبود (۲۵×۱۰^{-۱۹} فرض شد). این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۵ صفحه ۶۸ تمرین

فاصله‌ی کیوان از زمین $۶/۲۸۷\times۱۰^{۸}$ کیلومتر و فاصله‌ی مریخ از زمین $۹/۱۷\times۱۰^{۷}$ کیلومتر است. با مقایسه‌ی این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک‌تر است؟

$9/17\times10^{7}=0/917\times10^{8}<6/287\times10^{8}$

پس مریخ به زمین نزدیک‌تر است.

۱۴۶ صفحه ۶۸ تمرین

در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد: $0/02<\square\times10^{}2/7$ و $0/03>0/003\times10^{\square}$

الف) باید $2/7\times10^{k}>0/02$ باشد؛ $k=-2:0/027$ ، $k=-1:0/27$ ، $k=0:2/7$ (و هر $k\geq-۲$) جواب است.

ب) باید $0/003\times10^{k}<0/03$، یعنی $10^{k}<10$ باشد؛ $k=0$ ، $k=-1$ ، $k=-2$ (و هر $k\leq۰$) جواب است.

۱۴۷ صفحه ۶۸ تمرین

عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: $3/7\times10^{-2}$, $5/35\times10^{-3}$, $1/2\times10^{6}$, $1/5\times10^{-2}$

$3/7\times10^{-2}=0/037$ ، $5/35\times10^{-3}=0/00535$ ، $1/2\times10^{6}=1200000$ ، $1/5\times10^{-2}=0/015$

$5/35\times10^{-3}<1/5\times10^{-2}<3/7\times10^{-2}<1/2\times10^{6}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴۸ صفحه ۶۹ فعالیت

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را مانند نمونه‌ها به دست آورید: $(-3)^2 = 9$ (نمونه) ، $(-5)^2$ ، $(-4)^2$

$(-4)^2 = 16$ ، $(-5)^2 = (-5)\times(-5) = 25$

مربع هر عدد (مثبت یا منفی) نامنفی است.

بیشتر قسمت‌های این پرسش (از جمله عبارت‌های کسری) از متن ناخوانا بود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۹ صفحه ۶۹ فعالیت

جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید. (مربع یا توان دوم عدد)

عدد	مربع عدد (توان دوم)
۳	۹
۳-	۹
۱۳ و ۱۳-	۱۶۹
۷ و ۷-	۴۹
$\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$	۵
$\frac{3}{2}$ و $-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$

عددهای دقیق جدول از متن ناخوانا بود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵۰ صفحه ۶۹ فعالیت

جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید. (مکعب یا توان سوم عدد)

عدد	مکعب عدد (توان سوم)
۴	۶۴
۲-	۸-
۲	۸
۰	۰
۳	۲۷
۳-	۲۷-
۵	۱۲۵
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

عددهای دقیق جدول از متن ناخوانا بود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۱ صفحه ۷۰ کار در کلاس

ریشه‌ی سوم عدد ۲۷، عدد ... است؛ ریشه‌ی سوم عدد ۶۴ برابر ... و ریشه‌ی سوم عدد ۸- عدد ... است.

$\sqrt[3]{27}$ = ۳ چون 3^3 = 27

$\sqrt[3]{64}$ = ۴ چون 4^3 = 64

$\sqrt[3]{-8}$ = ۲- چون (-2)^3 = -8

۱۵۲ صفحه ۷۰ کار در کلاس

طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

- ($\sqrt[3]{8}$)^3 = 8
- $\sqrt[3]{-1}$ = ۱-
- $\sqrt[3]{125}$ = ۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

○ $\sqrt[3]{-27} = -3$

عبارت‌ها از متن به‌خوبی خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۳ صفحه ۷۰ کار در کلاس

حاصل هر عبارت را به دست آورید: $\sqrt{81}$ ، $\sqrt{2^4}$ ، $\sqrt{(-4)^2}$ ، $\sqrt[3]{-1}$ ، $\sqrt[3]{27}$ ، $\sqrt[3]{125}$ ، $\sqrt[3]{6^3}$ ، $\sqrt[3]{(-7)^3}$

عبارت	حاصل
$\sqrt{81}$	۹
$\sqrt{2^4}$	۴
$\sqrt{(-4)^2}$	۴
$\sqrt[3]{-1}$	-۱
$\sqrt[3]{27}$	۳
$\sqrt[3]{125}$	۵
$\sqrt[3]{6^3}$	۶
$\sqrt[3]{(-7)^3}$	-۷

بعضی از عبارت‌ها از متن ناخوانا بود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵۴ صفحه ۷۰ کار در کلاس

به کمک رابطه‌ی $\sqrt{x^2}=|x|$ که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید: $\sqrt{(-6)^2}$ ، $\sqrt{8^2}$ ، $\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$ ، $\sqrt{(-12)^2}$ ، $\sqrt{(-29)^2}$

عبارت	حاصل
$\sqrt{(-6)^2}$	$\|-۶\|=۶$
$\sqrt{8^2}$	۸
$\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$	$\frac{3}{5}$
$\sqrt{(-12)^2}$	۱۲
$\sqrt{(-29)^2}$	۲۹

عبارت‌های کسری از متن به‌خوبی خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۵ صفحه ۷۰ کار در کلاس

حاصل عبارت $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$ را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید؛ یکی از حالت‌ها حل شده است.

الف) x و y هر دو مثبت ب) x منفی و y مثبت ج) x مثبت و y منفی د) x و y هر دو منفی

- الف) $|x|+|y|=x+y$
- ب) $x<0\ ,\ y>0 : |x|+|y|=-x+y$
- ج) $x>0\ ,\ y<0 : |x|+|y|=x+(-y)=x-y$
- د) $x<0\ ,\ y<0 : |x|+|y|=-x+(-y)=-x-y$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵۶ صفحه ۷۱ فعالیت

با توجه به عددهای داده‌شده‌ی a و b جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسه‌ی دو ستون آخر جدول چه حدسی می‌زنید؟ (ستون‌ها: $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$ ، $\sqrt[3]{ab}$ ، $\sqrt[3]{a}\div\sqrt[3]{b}$ ، $\sqrt[3]{a/b}$)

a	b	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$
۸	۱۲۵	۲	۵	$\sqrt[3]{۱۰۰۰}=۱۰$	$۲\times۵=۱۰$
۱	۸	۱	۲	$\sqrt[3]{۸}=۲$	$۱\times۲=۲$
۲۷	۸	۳	۲	$\sqrt[3]{۲۱۶}=۶$	$۳\times۲=۶$
۸-	۲۷	۲-	۳	$\sqrt[3]{(-۲۱۶)}=-۶$	$(-۲)\times۳=-۶$

a	b	$\sqrt[3]{a/b}$	$\sqrt[3]{a}\div\sqrt[3]{b}$
۸	۱۲۵	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
۱	۸	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
۲۷	۸	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
۸-	۲۷	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

حدس: برای هر دو عدد a و b: $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$ و برای $b\neq 0$: $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

عددهای ردیف‌های جدول از متن به‌خوبی خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۷ صفحه ۷۱ کار در کلاس

آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهید. $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{8+27}$

خیر. سمت چپ: 5 = 3 + 2.

سمت راست: $\sqrt[3]{35}$ و چون 3^4 = 64 > 35 > 27 = 3^3، مقدار آن بین ۳ و ۴ و کمتر از ۴ است.

پس دو طرف برابر نیستند؛ ریشه‌ی سوم نسبت به جمع پخش نمی‌شود.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵۸ صفحه ۷۲ تمرین

ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید: $\frac{16}{49}$ ، $\frac{1}{81}$ ، ۱۵ ، ۱۴۴ ، ۱۲ ، ۱۸

عدد	ریشه‌های دوم
$\frac{16}{49}$	$\pm\frac{4}{7}$
$\frac{1}{81}$	$\pm\frac{1}{9}$
۱۵	$\pm\sqrt{15}$
۱۴۴	±۱۲
۱۲	$\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$
۱۸	$\pm\sqrt{18}=\pm3\sqrt{2}$

۱۵۹ صفحه ۷۲ تمرین

ریشه‌ی سوم عددهای زیر را به دست آورید: ۲۱۶ ، ۳^۷ ، ۵- ، ۱/۲۱۶- ، ۱۰

عدد	ریشه‌ی سوم
۲۱۶	۶
۳^۷	۷
۵-	$-\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{-5}$
$-\frac{1}{216}$	$-\frac{1}{6}$
۱۰	$\sqrt[3]{10}$

فهرست عددها از متن به‌خوبی خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶۰ صفحه ۷۲ تمرین

کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

عبارت	نتیجه
$\sqrt{(-11)^2} = -11$	نادرست؛ برابر ۱۱ است
$\sqrt[3]{(-11)^3} = -11$	درست
$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$	درست
$\sqrt{(-5)^2} = \lvert -5 \rvert = 5$	درست (برابر ۵ است، نه ۵−)
$-\sqrt{49} = -7$	درست
$\sqrt{256} = 16$	درست
$\sqrt[3]{-64} = -4$	درست

بعضی از عبارت‌ها از متن ناخوانا بود و حدسی بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۱ صفحه ۷۲ تمرین

حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم وصل کنید. (عددهای سطر دوم: ۳ ، ۳۰ ، ۹− ، ۵−)

عبارت	حاصل
$\sqrt{36} \times \sqrt[3]{125}$	$5 \times 6 = 30$
$\sqrt[3]{-1} \times \sqrt{81}$	$9 \times (-1) = -9$
$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{-25}$	$\sqrt[3]{-125} = -5$
$\sqrt[3]{3} \div \sqrt[3]{81}$	$\sqrt[3]{27} = 3$

عبارت‌های سطر اول از روی عددهای سطر دوم بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶۲ صفحه ۷۲ تمرین

در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید.

- $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4} = ۴$
- $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2}\,۴$
- $\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{4}$
- $\sqrt[3]{-54} \div \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{-27} = -۳$

تساوی‌ها از متن ناخوانا بود و حدسی بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۳ صفحه ۷۳ تمرین

حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم نامساوی زیر درست باشد: $\sqrt[3]{a} < 4$

باید a < 4^3 = 64 باشد؛ مثلاً a = 1 ، a = 8 ، a = 27 (و هر عدد منفی یا صفر).

شکل دقیق نامساوی از متن ناخوانا بود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۴ صفحه ۷۳ تمرین

رابطه‌ی $\sqrt{x^2} = -x$ **به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.**

چون √(x^2) = |x|، برابری وقتی درست است که |x| = −x، یعنی x ≤ 0.

مثال: √9 = 3 = −(−3) : x = −3 و x = 0 : 0 = 0. برای x = 2 نادرست است.

۱۶۵ صفحه ۷۳ تمرین

اگر مساحت کل یک مکعب $۹۶a^2$ **باشد، حجم آن را بر حسب a به دست آورید.**

ضلع مکعب: s = 4a ⇒ s^2 = 16a^2 ⇒ 6s^2 = 96a^2

حجم: V = s^3 = (4a)^3 = 64a^3

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶۶ صفحه ۷۳ تمرین

اگر $x > 0$ و $y < 0$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

$|x| - |y| = x - (-y) = x + y$

عبارت دقیق از متن به‌خوبی خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۷ صفحه ۷۳ تمرین

عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید: $\sqrt{150}$ ، $\sqrt{80}$ ، $\sqrt{24}$ ، $\sqrt[3]{250}$

عبارت	ساده‌شده
$\sqrt{150}$	$5\sqrt{6} = \sqrt{25 \times 6}$
$\sqrt{80}$	$4\sqrt{5} = \sqrt{16 \times 5}$
$\sqrt{24}$	$2\sqrt{6} = \sqrt{4 \times 6}$
$\sqrt[3]{250}$	$5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{125 \times 2}$

عبارت آخر از متن به‌خوبی خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۸ صفحه ۷۳ تمرین

آیا تساوی‌های زیر درست است؟ $\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$ ، $(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$

هر دو درست‌اند: $\sqrt[3]{(-2)} = -2$ طبق تعریف ریشه‌ی سوم؛ و $\sqrt[3]{(-4)} = -\sqrt[3]{4}$ زیرا $(-\sqrt[3]{4})^3 = -4$.

۱۶۹ صفحه ۷۳ تمرین

حاصل را به دست آورید: $\frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4}}$ ، $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ ، $\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{5}}$

$$\sqrt[3]{\frac{2 \times 16}{4}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt{\frac{8 \times 5}{10}} = \sqrt{4} = 2$$

irantooshe.ir

$$\sqrt[3]{\frac{18\times 60}{5}} = \sqrt[3]{216} = 6$$

صورت و مخرج‌ها از متن به‌خوبی خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۷۰ صفحه ۷۴ — کار در کلاس

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن ۶√۲ متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.

به کمک رابطه‌ی فیثاغورس (ضلع x): $(2\sqrt{6})^2 = x^2 + x^2$

در نتیجه 2x^2 = 24 و از آنجا x^2 = 12.

بنابراین مساحت این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا نتیجه می‌گیریم که ضلع مربع $\sqrt{12}$ متر یا $2\sqrt{3}$ متر است.

همچنین: محیط = $4 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ متر.

قطر مربع از متن به‌صورت ۶√۲ بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۷۱ صفحه ۷۴ — فعالیت

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید.

قاعده: رادیکال‌های هم‌قسمت‌رادیکالی را مانند عبارت جبری هم‌نوع جمع می‌کنیم: $a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\sqrt{x}$؛ مثلاً $3\sqrt{2} = 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ و $7\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$.

عددهای جدول از متن استخراج‌شده ناخوانا بود و فقط قاعده‌ی حل آمد.

---

۱۷۲ صفحه ۷۵ — فعالیت

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید. راه‌حل‌ها را توضیح دهید و کامل کنید. الف) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{72}$

ب) $\sqrt{50} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81}$

الف) $\sqrt{72} = \sqrt{36\times 2} = 6\sqrt{2}$ ، $\sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$ ، $\sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$

بنابراین: $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{72} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

ب) $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$ ، $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$ ، $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

بنابراین: $3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}+5\sqrt{2}=5\sqrt[3]{3}+5\sqrt{2}$

عبارت (ب) از روی جاهای خالی بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۷۳ صفحه ۷۵ کار در کلاس

مثال ۲: حاصل $(\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48})\div\sqrt{3}$ را به دست آورید. «بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)»

$\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}$

پس حاصل برابر $\sqrt{3}\div\sqrt{3}$ است و چون هر عدد غیرصفر تقسیم بر خودش ۱ می‌شود، جواب ۱ است.

---

۱۷۴ صفحه ۷۶ کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۱) $\sqrt{128}+\sqrt{50}-\sqrt{98}$ **۲)** $\sqrt{48}+\sqrt{75}-\sqrt{12}-\sqrt{27}$ **۳)** $5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{54}-4\sqrt[3]{128}$ **۵)** $(2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{3})$

- ۱) $7\sqrt{2}-5\sqrt{2}+8\sqrt{2}=10\sqrt{2}$
- ۲) $3\sqrt{3}-2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+4\sqrt{3}=0$
- ۳) $5\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{2}-16\sqrt[3]{2}=-2\sqrt[3]{2}$
- ۵) $6-4\sqrt{3}+3\sqrt{3}-6=-\sqrt{3}$
- ۴) از متن ناخوانا بود.

عبارت‌های ۳ و ۵ حدسی بازسازی شد و عبارت ۴ پاسخ داده نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۷۵ صفحه ۷۶ فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هرجا لازم است راه‌حل را کامل کنید.

الف) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ **ب) ...**

الف) $\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

روش: برای مخرج $\sqrt{a}$ صورت و مخرج را در $\sqrt{a}$ ضرب می‌کنیم؛ برای $\sqrt[3]{a}$ در $\sqrt[3]{a^2}$ (چون $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = a$)؛ مثلاً $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$.

قسمت‌های (ب) تا (و) از متن ناخوانا بود و فقط روش آمد.

---

۱۷۶ صفحه ۷۶ کار در کلاس

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید: الف) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ ب) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ ج) $\frac{12}{\sqrt{6}}$

- الف) $\frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
- ب) $\frac{2}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$
- ج) $\frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$

قسمت (د) و عبارت‌های دقیق (ب) و (ج) از متن ناخوانا بود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۷۷ صفحه ۷۷ تمرین

عبارت‌های زیر را ساده کنید. ب) $\sqrt{8} - \sqrt{128} + \sqrt{50}$ د) $\sqrt{27} - \sqrt{3}$

ب) $5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$

د) $3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

قسمت‌های (الف)، (ج)، (هـ) و (و) از متن ناخوانا بود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۷۸ صفحه ۷۷ تمرین

اگر $x < 0$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید: $\sqrt{x^2} - 2x$

چون x منفی است $\sqrt{(x^2)} = |x| = -x$؛ پس $-x - 2x = -3x$.

عبارت دقیق از متن ناخوانا بود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷۹ صفحه ۷۷ تمرین

محیط و مساحت مربعی به ضلع $۵\sqrt{۳}$ سانتی‌متر را به دست آورید.

محیط: $4 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$ سانتی‌متر

مساحت: $(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$ سانتی‌متر مربع

۱۸۰ صفحه ۷۷ تمرین

شکل مقابل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را نشان می‌دهد. اندازه‌ی ارتفاع h را بر حسب a به دست آورید؛ سپس مساحت آن را بر حسب a بنویسید.

ارتفاع، قاعده را نصف می‌کند؛ با فیثاغورس: $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

مساحت: $S = \frac{1}{2} \times a \times h = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

۱۸۱ صفحه ۷۷ تمرین

نقاط M، N، P و Q وسط‌های ضلع‌های مربع ABCD هستند. اگر مساحت مربع ABCD برابر ۱۰۰ مترمربع باشد، محیط مربع MNPQ چقدر است؟

ضلع ABCD برابر ۱۰ است. ضلع MNPQ وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ساق‌های ۵ و ۵ است:

$$\sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

محیط MNPQ $= 4 \times 5\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$ متر (حدود ۲۸/۳ متر).

شکل دیده نشد؛ طبق متن وسط‌ها به‌ترتیب M,N,P,Q فرض شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی نهم - فصل پنجم

عبارت‌های جبری

فهرست

۱۸۲ صفحه ۷۹ · فعالیت — ضرب تک‌جمله‌ای‌ها ۹۷

۱۸۳ صفحه ۸۰ · فعالیت — درجه‌ی تک‌جمله‌ای ۹۷

۱۸۴ صفحه ۸۰ · فعالیت — مرتب کردن چندجمله‌ای ۹۸

۱۸۵ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — ساده کردن و مرتب کردن عبارت‌های جبری ۹۸

۱۸۶ صفحه ۸۱ · فعالیت — مفهوم اتحاد ۹۸

۱۸۷ صفحه ۸۲ · فعالیت — مربع دو جمله‌ای ۹۹

۱۸۸ صفحه ۸۳ · کار در کلاس — اتحاد مربع دو جمله‌ای ۱۰۰

۱۸۹ صفحه ۸۴ · کار در کلاس — تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای ۱۰۱

۱۹۰ صفحه ۸۴ · کار در کلاس — تجزیه با فاکتور مشترک ۱۰۱

۱۹۱ صفحه ۸۵ · تمرین — ساده کردن و اتحادها ۱۰۲

۱۹۲ صفحه ۸۶ · فعالیت — مربع سه‌جمله‌ای ۱۰۳

۱۹۳ صفحه ۸۶ · کار در کلاس — تساوی‌ها با اتحاد مناسب ۱۰۴

۱۹۴ صفحه ۸۷ · کار در کلاس — اتحاد مزدوج ۱۰۴

۱۹۵ صفحه ۸۷ · فعالیت — تجزیه با اتحاد مزدوج ۱۰۴

۱۹۶ صفحه ۸۸ · فعالیت — اتحاد جمله‌ی مشترک ۱۰۵

۱۹۷ صفحه ۸۹ · فعالیت — تجزیه به چهار روش ۱۰۶

۱۹۸ صفحه ۸۹ · تمرین — اتحادها و تجزیه ۱۰۶

۱۹۹ صفحه ۹۰ · فعالیت — مقایسه‌ی وزنه‌ها و نابرابری ۱۰۸

۲۰۰ صفحه ۹۱ · کار در کلاس — نابرابری‌ها و علامت عددها ۱۰۸

۲۰۱ صفحه ۹۱ · فعالیت — خاصیت جمع در نابرابری ۱۰۹

۲۰۲ صفحه ۹۲ · فعالیت — ضرب در نابرابری و نامعادله ۱۰۹

۲۰۳ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — حل نامعادله ۱۱۰

۲۰۴ صفحه ۹۳ · تمرین — نابرابری و نامعادله ۱۱۰

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۸۲ صفحه ۷۹ **فعالیت**

حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه‌ها به دست آورید (ضرب تک‌جمله‌ای‌ها): ۱) $2(-4x)(7x^2)$ ۲) $\left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3$

۳) $\left(\frac{2}{3}x\right)(-3x^2)$ ۴) $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)(ab)(2a^2c)$ ۵) $\frac{1}{2}(5xy^4)(-2x^5y^2)$ ۶) $(2x^2y)(3x^2y^3)$

در ضرب تک‌جمله‌ای‌ها ضریب‌ها را در هم و توان متغیرهای یکسان را با هم جمع می‌کنیم.

۱) $2(-4x)(7x^2) = 2 \times (-28x^3) = -56x^3$

۲) $\left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3 = \frac{8}{27}x^6y^3$

۳) $\left(\frac{2}{3}x\right)(-3x^2) = -2x^3$

۴) $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)(ab)(2a^2c) = -a^5b^2c$

۵) $\frac{1}{2}(5xy^4)(-2x^5y^2) = -5x^6y^6$

۶) $(2x^2y)(3x^2y^3) = 6x^4y^4$

قسمتی از عبارت‌های این پرسش در متن خوانا نبود؛ بهترین برداشت ممکن حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۳ صفحه ۸۰ **فعالیت**

جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید (درجه‌ی تک‌جمله‌ای نسبت به هر متغیر و نسبت به همه‌ی متغیرها):

$a^3x^2y^4$ ، $5x^2y^2z^4$ ، $-12x^3y$ ، $\frac{3}{5}xy^2$

تک‌جمله‌ای	x درجه نسبت به	y درجه نسبت به	y و x درجه نسبت به متغیرهای
$a^3x^2y^4$	۲	۴	۶=۲+۴
$5x^2y^2z^4$ (نسبت به z: ۴)	۲	۲	۴
$-12x^3y$	۳	۱	۴
$\frac{3}{5}xy^2$	۱	۲	۳

قسمتی از عبارت‌های این پرسش در متن خوانا نبود؛ بهترین برداشت ممکن حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۸۴ صفحه ۸۰ فعالیت

چندجمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید (توان‌های نزولی x): الف) $3bxy - 3 + ax^2y - 4bx^3y^2$ **ب)** $2x^3 + 5 - 2x + 3x^2$

- الف) $2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$
- ب) $-4by^2x^3 + ayx^2 + 3byx - 3$

قسمتی از عبارت‌های این پرسش در متن خوانا نبود؛ بهترین برداشت ممکن حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۵ صفحه ۸۰ کار در کلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید: ب) $[4a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax)]$ **ج)** $2a - 5 - 3ax + x^2$ **د)** $(4x + 5x^2)(x^3 - x + 1)$

هـ) $(x + x^2)(x^4 + x^2 + 1)$ **(نمونه‌ی الف:** $(x^2 - 2x + 1)(x^3 + x^2 - 2)$

$2a - 5 - 3ax + x^2 - (4x^2 + 5ax - 3a^2) = -3x^2 - 8ax + 3a^2 + 2a - 5$ **)**

- ب) $4a^2 + 5ax - 3a^2 + 8ax = a^2 + 13ax$ ؛ پس

  $2a - 5 - 3ax + x^2 - a^2 - 13ax = x^2 - 16ax - a^2 + 2a - 5$
- ج) $4x^4 - 4x^2 + 4x + 5x^5 - 5x^3 + 5x^2 = 5x^5 + 4x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x$
- د) $x^5 + x^3 + x + x^6 + x^4 + x^2 = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$
- هـ) $x^5 + x^4 - 2x^2 - 2x^4 - 2x^3 + 4x + x^3 + x^2 - 2 = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 2$

عبارت‌های (هـ) و (ج) با تردید خوانده شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۶ صفحه ۸۱ فعالیت

۱ــ به ازای مقادیر داده‌شده برای x (۰ و ۵ و ۳ و ۲)، جدول زیر را کامل کنید: ستون‌های $(x + 3)^2$ **و** $x^2 + 6x + 9$ **. مقدارهای دو ستون آخر را مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟ حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر x ادامه دهید. چه حدسی می‌زنید؟ حاصل** $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$ **را به دست آورید و آن را با**

عبارت $x^2 + 6x + 9$ مقایسه کنید. برابری $x^2 + 1 = -3x + \ldots$ (معادله) را به ازای $x=2$ بررسی کنید؛ آیا این برابری یک اتحاد است؟

x	$(x+3)^2$	$x^2 + 6x + 9$
۰	۹	۹
۵	۶۴	۶۴
۳	۳۶	۳۶
۲	۲۵	۲۵

مقدارهای دو ستون آخر برای هر x برابرند؛ حدس می‌زنیم $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ به ازای هر x برقرار است. برای مثال $x=-۱$: $(2)^2 = 4$ و $9 - 6 + 1 = 4$.

$(x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$ ؛ پس دو عبارت همیشه مساوی‌اند و برابری یک اتحاد است.

برابری‌ای مثل یک معادله فقط به ازای بعضی مقدارهای x برقرار است (نه همه‌ی x) و در نتیجه اتحاد نیست؛ برای بررسی کافی است یک مقدار پیدا کنیم که دو طرف را برابر نکند.

معادله‌ی انتهای این فعالیت در متن خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۷ صفحه ۸۲ **فعالیت**

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید: الف) $(a+4)^2$ ب) $(5x+2)^2$ ج) $(a+b)^2$

۳ــ با دقت در برابری $(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$ به سؤال‌ها پاسخ دهید: جمله‌ی اول سمت راست ($25x^2$) چه رابطه‌ای با $5x$ دارد؟ جمله‌ی دوم (۲۰x) چه رابطه‌ای با ۲ و $5x$ دارد؟ جمله‌ی سوم (۴) چه رابطه‌ای با ۲ دارد؟

برای هر دو عدد مثبت a و b، به کمک مساحت‌های مشخص‌شده در شکل (مربعی به ضلع a+b) درستی اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ را نشان دهید.

۴ــ مانند سؤال ۲، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید: الف) $(5x-2)^2$ ب) $(5-3x)^2$ ج) $(a-b)^2$.

ارتباط بین جمله‌های به دست آمده در طرف راست و جمله‌های عبارت داده‌شده را بیان کنید.

۲

- الف) $(a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$
- ب) $(5x+2)(5x+2) = 25x^2 + 10x + 10x + 4 = 25x^2 + 20x + 4$

ج) $(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

۳

- جمله‌ی اول مربع جمله‌ی اول عبارت است: $(5x)^2 = 25x^2$.
- جمله‌ی دوم دو برابر حاصل‌ضرب دو جمله است: $2 \times 5x \times 2 = 20x$.
- جمله‌ی سوم مربع جمله‌ی دوم است: $2^2 = 4$.

مربع بزرگ به ضلع a+b از چهار قسمت تشکیل شده است: مربعی به ضلع a (مساحت $S_1 = a^2$)، مربعی به ضلع b (مساحت $S_2 = b^2$) و دو مستطیل a×b (مساحت هر کدام $S_3 = ab$). پس $(a+b)^2 = S_1 + 2S_3 + S_2 = a^2 + 2ab + b^2$.

۴

- الف) $(5x-2)(5x-2) = 25x^2 - 20x + 4$
- ب) $(5-3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$
- ج) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مربع تفاضل دو جمله = مربع جمله‌ی اول + مربع جمله‌ی دوم − دو برابر حاصل‌ضرب دو جمله.

۱۸۸ صفحه ۸۳ کار در کلاس

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید: الف) $(2x+1)^2$ **ب)** $(4a+3b)^2$ **ج)** $\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$ **د)** $\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2$

۲ــ جاهای خالی را با توجه به نمونه پر کنید: الف) $(1+b)^2$ **ب)** $\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2$ **ج)** $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2$ $(x \neq 0)$ **د)**

$(6x-y)^2 = 36x^2 - 12xy + \ldots$

۱

- الف) $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$
- ب) $(4a+3b)^2 = 16a^2 + 24ab + 9b^2$
- ج) $\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 = \frac{x^2}{4} - x + 1$
- د) $\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2 = x^2y^2 - xy + \frac{1}{4}$

۲

- الف) $(1+b)^2 = 1 + 2b + b^2$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) $x^2y^2 - xy + \frac{1}{4}$

ج) $x^2 - 4 + \frac{4}{x^2}$

د) $(6x - y)^2 = 36x^2 - 12xy + y^2$

قسمتی از عبارت‌های این پرسش در متن خوانا نبود؛ بهترین برداشت ممکن حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۸۹ صفحه ۸۴ **کار در کلاس**

با توجه به نمونه توضیح دهید که چگونه در سه‌جمله‌ای داده‌شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود: الف) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ **ب)** $4 - 4x + x^2$ **ج)** $25 + 20n^2 + 4n^4$ **د)** $8ax^2 + 24axy + 18ay^2$

ابتدا بررسی می‌کنیم که جمله‌ی اول و جمله‌ی آخر مربع کامل‌اند و جمله‌ی وسط دو برابر حاصل‌ضرب ریشه‌ی آنهاست؛ سپس به‌صورت $(A \pm B)^2$ می‌نویسیم.

الف) $x^2 = (x)^2,\ 9 = 3^2,\ 6x = 2 \cdot x \cdot 3$

ب) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2)$

ج) $4n^4 - 20n^2 + 25 = (2n^2 - 5)^2 = (2n^2 - 5)(2n^2 - 5)$

د) $8ax^2 + 24axy + 18ay^2 = 2a(4x^2 + 12xy + 9y^2) = 2a(2x + 3y)^2$

ضریب جمله‌ی وسط در (ج) با تردید خوانده شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۹۰ صفحه ۸۴ **کار در کلاس**

چندجمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید (ب.م.م = بزرگ‌ترین عامل مشترک): الف) $8x^2 + 12x = 4x(2x + 3)$ **(نمونه) ب)** $6a^4 - 18a^3$ **ج)** $21x^2 - 14x^3 + 7x^4$ **د)** $15xy - 10xy^2 + 5x^2y$

ب) $6a^4 - 18a^3 = 6a^3(a - 3)$

ج) $7x^4 - 14x^3 + 21x^2 = 7x^2(x^2 - 2x + 3)$

د) $5x^2y - 10xy^2 + 15xy = 5xy(x - 2y + 3)$

جمله‌ی آخر (د) با تردید خوانده شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱ــ عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید: ب) $(3a^2 - 9b^3 - 11c^3) - 7a^2 - 4b^3 + 5c^3$ **د)**

$x - [(y - x) - (y - 1)]$

۲ــ محیط و مساحت هر شکل را بیابید (الف: مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های ۳xy و ۴xy و ۵xy).

۳ــ طرف دیگر عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید: الف) $(5y - 3x)^2$ **د)**

$(2.7)^2 + 2(2.7)(3.3) + (3.3)^2$

۴ــ به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید: الف) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$

ب) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \quad (a \neq 0)$

۵ــ عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید: ج) $a(x + 1) + b(x + 1)^2$ **د)** $3a^3 - 2a^2 + a$ **هـ)**

$25x^4 + 30x^3 + 9x^2$ **و)** $x^2y^2 - 4xy + 4$

۶ــ با تبدیل b به b- در اتحاد $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**، طرف دوم تساوی** $(a + (-b))^2$ **را کامل کنید.**

۱

- ب) $7a^2 - 4b^3 + 5c^3 - 3a^2 + 9b^3 + 11c^3 = 4a^2 + 5b^3 + 16c^3$
- د) $x - [y - x - y + 1] = x - [-x + 1] = 2x - 1$

قسمت‌های (الف) و (ج) این پرسش در متن خوانا نبود و حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲ الف

محیط = $3xy + 4xy + 5xy = 12xy$ ؛ مساحت = $\frac{1}{2} \times 3xy \times 4xy = 6x^2y^2$.

شکل (ب) در متن خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳

- الف) $(5y - 3x)^2 = 25y^2 - 30xy + 9x^2$
- د) $(2.7)^2 + 2(2.7)(3.3) + (3.3)^2 = (2.7 + 3.3)^2 = 6^2 = 36$

۴

- الف) $(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) = 4xy$
- ب) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$

۵

- ج) $a(x + 1) + b(x + 1)^2 = (x + 1)[a + b(x + 1)] = (x + 1)(a + bx + b)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

د) $3a^3 - 2a^2 + a = a(3a^2 - 2a + 1)$

هـ) $x^2y^2 - 4xy + 4 = (xy - 2)^2$

و) $25x^4 + 30x^3 + 9x^2 = x^2(25x^2 + 30x + 9) = x^2(5x + 3)^2$

۶

$(a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ؛ این همان اتحاد مربع تفاضل است.

قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) پرسش ۳ و ۵ و بعضی قسمت‌های دیگر در متن خوانا نبود؛ فقط قسمت‌های خوانا حل شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۹۲ صفحه ۸۶ **فعالیت**

۱ــ حاصل عبارت $(a + b + c)^2$ را با دو روش ارائه‌شده انجام دهید و آنها را کامل کنید: روش اول: $(a + b + c)(a + b + c)$ روش دوم: $((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + \dots$ به کمک نتیجه‌ی این فعالیت، حاصل $(a + b - c)^2$ را به دست آورید.

۲ــ با استفاده از ضرب عبارت‌های جبری، حاصل $(a + b)(a - b)$ را به دست آورید. اگر a و b مثبت و a<b باشد (بنا به شکل)، به کمک شکل‌ها درستی اتحاد $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ را نتیجه بگیرید. این اتحاد را به‌صورت کلامی بیان کنید.

۱

روش اول:

$(a + b + c)(a + b + c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

روش دوم: $(a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ (همان نتیجه).

با تبدیل c به $-c$: $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$.

۲

$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

از مربعی به ضلع a مربعی به ضلع b را جدا می‌کنیم؛ مساحت باقی‌مانده $s_1 = a^2 - b^2$ است. این شکل را می‌بریم و به مستطیلی به ابعاد a+b و a−b تبدیل می‌کنیم؛ مساحت آن $s_2 = (a - b)(a + b)$ است. چون $s_1 = s_2$ پس $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

اتحاد مزدوج: حاصل‌ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آنها برابر است با مربع جمله‌ی اول منهای مربع جمله‌ی دوم.

۱۹۳ صفحه ۸۶ کار در کلاس

۱ــ تساوی‌های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید: ۱) $(1 + a)(1 - a) = 1 - \ldots$ ۲) $(2a + 5)(2a - 5) = \ldots - 25$ ۳) $(t + \ldots)(t - \ldots) = t^2 - 9$ ۴) $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + \ldots$

- ۱) $(1 + a)(1 - a) = 1 - a^2$
- ۲) $(2a + 5)(2a - 5) = 4a^2 - 25$
- ۳) $(t + 3)(t - 3) = t^2 - 9$
- ۴) $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

۱۹۴ صفحه ۸۷ کار در کلاس

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورید: ۱) $(10 - x)(x + 10) = 100 - x^2$ (نمونه) ۲) $(-y - 2z)(-2z + y)$ ۳) $(-7y + t)(t + 7y)$ ۴) $(-4y - 2z)(2z - 4y)$ ۵) $(x - 2y + 5)(x + 2y - 5)$

- ۲) $(-2z - y)(-2z + y) = 4z^2 - y^2$
- ۳) $(t - 7y)(t + 7y) = t^2 - 49y^2$
- ۴) $(-4y - 2z)(-4y + 2z) = 16y^2 - 4z^2$
- ۵) $[x - (2y - 5)][x + (2y - 5)] = x^2 - (2y - 5)^2 = x^2 - 4y^2 + 20y - 25$

۱۹۵ صفحه ۸۷ فعالیت

۱ــ محسن قصد دارد عبارت $4x^2 - (7 - 3y)^2$ را تجزیه کند. او با اتحاد مزدوج آن را به‌صورت $(2x - 7 + 3y)(2x + 7 - 3y)$ تجزیه می‌کند. به نظر شما محسن A و B را چگونه انتخاب کرده است؟ با توجه به $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ جای خالی را پر کنید: ۱) $x^2 - 9$ ۳) $(2x + 1)^2 - y^2$ ۴) $1 - (3a + z)^2$ ۵) $x^4 - y^4$ ۶) $(2x + 1)^2 - (3x + 4)^2$

محسن $A = 2x$ را انتخاب کرده است؛ آنگاه $B = 7 - 3y$ و (چون $4x^2 = (2x)^2$) $(A - B)(A + B) = (2x - (7 - 3y))(2x + (7 - 3y))$.

- ۱) $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$
- ۳) $(2x + 1)^2 - y^2 = [(2x + 1) - y][(2x + 1) + y]$

irantooshe.ir

۴) $1 - (3a + z)^2 = [1 - (3a + z)][1 + (3a + z)] = (1 - 3a - z)(1 + 3a + z)$

۵) $[(2x + 1) - (3x + 4)][(2x + 1) + (3x + 4)] = (-x - 3)(5x + 5)$

۶) $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

قسمت (۲) این پرسش در متن خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۹۶ صفحه ۸۸ فعالیت

۱ــ به تساوی‌های زیر دقت کنید. توضیح دهید عبارت سمت راست چگونه به دست آمده است؟ الف) $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$ **ب)** $(x + 9)(x - 4) = x^2 - 4x + 9x - 36 = x^2 + 5x - 36$ **تساوی** $(x + a)(x + b) = x^2 + (\dots)x + \dots$ **را کامل کنید.**

۲ــ اگر طرف راست را داشته باشیم و بخواهیم آن را به حاصل‌ضرب دو عبارت تجزیه کنیم، اعداد a و b را چگونه تشخیص دهیم؟ الف) $x^2 + 7x + 10$ **ب)** $x^2 + 7x + 12$ **ج)** $y^2 + y - 6$ **د)** $y^2 - y - 6$ **هـ)** $y^2 + 5y + 6$

۳ــ به کمک اتحادها، تساوی‌های زیر را کامل کنید: 102×98 ، 497×503 ، $(1001)^2$

۱

ضرب می‌کنیم و جمله‌های هم‌درجه را جمع می‌کنیم: ضریب x برابر مجموع دو عدد (۲+۵=۷ و ۹+(-۴)=۵) و جمله‌ی آخر برابر حاصل‌ضرب دو عدد (۲×۵=۱۰ و ۹×(-۴)=-۳۶) است. پس: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

۲

دو عدد می‌یابیم که حاصل‌ضربشان جمله‌ی آخر و مجموعشان ضریب x باشد:

الف) $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

ب) $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$

ج) $y^2 + y - 6 = (y + 3)(y - 2)$

د) $y^2 - y - 6 = (y - 3)(y + 2)$

هـ) $y^2 + 5y + 6 = (y + 2)(y + 3)$

۳

$98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2) = 100^2 - 2^2 = 9996$

$497 \times 503 = (500 - 3)(500 + 3) = 250000 - 9 = 249991$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

- $(1001)^2 = (1000 + 1)^2 = 1000000 + 2000 + 1 = 1002001$

۱۹۷ صفحه ۸۹ فعالیت

۳ــ تجزیه‌ی عبارت $x^2 + 10x - 24$ را چهار نفر از دانش‌آموزان به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک به چهار صورت زیر انجام داده‌اند. کدام‌یک درست و کدام نادرست است؛ چرا؟ نفر اول: $(x + 6)(x - 4)$ نفر دوم: $(x + 6)(x + 4)$ نفر سوم: $(x + 12)(x - 2)$ نفر چهارم: $(x + 2)(x - 12)$

دو عدد باید حاصل‌ضربشان ۲۴- و مجموعشان ۱۰ باشد: ۲- و ۱۲. پس نفر سوم درست است: $(x - 2)(x + 12) = x^2 + 10x - 24$.

- نفر اول: مجموع ۴-+۶=۲ ≠ ۱۰ ؛ نادرست.
- نفر دوم: حاصل‌ضرب ۴×۶=۲۴ ≠ ۲۴- ؛ نادرست.
- نفر چهارم: مجموع ۲-۱۲=-۱۰ ≠ ۱۰ ؛ نادرست.

عبارت داده‌شده در متن خوانا نبود و از روی چهار جواب بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۹۸ صفحه ۸۹ تمرین

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید: الف) $\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$ ب) $(5x + 4)(5x + 3)$ ج) $(z - 3)(z + 3)$ د) $(3x + y - z)(3x + y + z)$ هـ) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ و) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 3)$

۲ــ در قسمت‌های جای خالی، با استفاده از اتحادها، عبارت‌های مناسب بگذارید: الف) $(xy - z)(xy + z) = \ldots - z^2$ ب) $(x + a)(x - b) = x^2 + \ldots - \ldots$ ج) $(x^2 + \ldots)(x^2 - 5) = x^4 + 2x^2 - \ldots$

۳ــ عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها تجزیه کنید: الف) $a^2 - 8a + 15$ ب) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ ج) $x^2 + 10x + 24$ د) $x^2 - 2x - 8$ هـ) $ax^4 - a$ و) $x^2 - 13x + 36$ ز) $x^2 - 12x + 36$ ح) $(x + y)^2 - 9$ ط) $x^4 - 5x^2 + 4$ ی) $bx^2 - 5bx - 50b$

۴ــ در اتحاد جمله‌ی مشترک اگر a=b باشد، چه اتحادی به دست می‌آید؟ اگر a و b قرینه باشند، کدام اتحاد به دست می‌آید؟

۵ــ به کمک مساحت‌ها در شکل (مستطیلی به ابعاد x+a و x+b)، اتحاد جمله‌ی مشترک را به دست آورید.

۱

- الف) $x^2 - \frac{1}{16}$
- ب) $25x^2 + 35x + 12$

- ج) $z^2 - 9$
- د) $(3x + y)^2 - z^2 = 9x^2 + 6xy + y^2 - z^2$
- هـ) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$
- و) $(x^2 - 4)(x^2 + 3) = x^4 - x^2 - 12$

۲

- الف) $x^2y^2 - z^2$
- ج) $x^2 + (a - b)x - ab$
- د) $(x^2 + 7)(x^2 - 5) = x^4 + 2x^2 - 35$

قسمت (ب) پرسش ۲ در متن خوانا نبود و حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳

- الف) $(a - 3)(a - 5)$
- ب) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$
- ج) $(x + 4)(x + 6)$
- د) $(x - 4)(x + 2)$
- هـ) $a(x^4 - 1) = a(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$
- و) $(x - 4)(x - 9)$
- ز) $(x - 6)^2$
- ح) $(x + y - 3)(x + y + 3)$
- ط) $b(x^2 - 5x - 50) = b(x - 10)(x + 5)$
- ی) $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

۴

اگر $a=b$: $(x + a)(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$ (مربع دو جمله‌ای). اگر $b=-a$: $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$ (اتحاد مزدوج).

۵

مساحت مستطیل بزرگ $(x + a)(x + b)$ است و از چهار قسمت تشکیل شده: $x^2 + ax + bx + ab$ ؛ پس $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

بعضی قسمت‌های این پرسش‌ها با تردید خوانده شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۹۹ صفحه ۹۰ فعالیت

روی کفه‌های ترازو دو وزنه‌ی a و b کیلوگرمی قرار دارد. با توجه به شکل، وزنه‌ی a از وزنه‌ی b سنگین‌تر است. با توجه به وضعیت ترازو، هر یک از نمادهای =، <، > را در جاهای خالی فقط یک بار استفاده و وزنه‌های a و b را مقایسه کنید: a □ b ، a □ b ، b □ a. اگر وزنه‌ای p کیلوگرمی باشد به طوری که p+b=a، برای اینکه کفه‌های ترازو هم بایستند، باید وزنه‌ی p کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟

با توجه به برابری‌های زیر مانند نمونه، یک نابرابری بنویسید: الف) $x=y+۴ \Rightarrow x>y$ ب) $m+۱=n+۳$ ج) $a-۲=b+۳$ د) $۲m=۳n$ $(m, n<۰)$

چون a سنگین‌تر از b است: $a > b$ ؛ $a \neq b$ (پس در جای دوم یکی از نمادها = قرار می‌گیرد و ادعای برابری نادرست است)؛ $b < a$.

وزنه‌ی p را باید روی کفه‌ی سبک‌تر (کفه‌ی b) گذاشت؛ چون $p + b = a$.

- ب) $m = n + 2 \Rightarrow m > n$
- ج) $a = b + 5 \Rightarrow a > b$
- د) $n = \frac{2}{3}m,\ m < 0 \Rightarrow m < n$

شکل ترازو دیده نشد (برداشت از متن). این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰۰ صفحه ۹۱ کار در کلاس

۱ــ متناظر با هر یک از ناحیه‌های مشخص‌شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.

۲ــ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید: الف) اگر $a+b>۰$ آنگاه a و b هر دو مثبت‌اند.

ب) اگر $ab>۰$ آنگاه a و b هم‌علامت هستند. ج) اگر $ab/c>۰$ آنگاه a و b و c منفی هستند. د) اگر $a/b^2<۰$ آنگاه b منفی است.

۳ــ عبارت‌های کلامی را به‌صورت جبری بنویسید: ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگ‌تر است. قرینه‌ی دو برابر عددی به‌علاوه‌ی ۳ از ۸ کوچک‌تر است.

۲

- الف) نادرست؛ مثلاً a=۵ و b=−۲ مجموع مثبت دارند ولی b منفی است.
- ب) درست؛ حاصل‌ضرب مثبت یعنی هر دو مثبت یا هر دو منفی.
- ج) نادرست؛ مثلاً a=b=c=۱ همه مثبت‌اند.
- د) نادرست؛ چون b^2 همواره مثبت است، a منفی می‌شود و b می‌تواند هر عدد غیر صفری باشد.

۳

$3x - 1 > 7$ و $-2x + 3 < 8$.

پرسش ۱ به شکل (محور) وابسته است و دیده نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰۱ صفحه ۹۱ **فعالیت**

۱ــ به دو طرف نابرابری‌های زیر عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟ (نمونه: $4 > 0 \rightarrow 0 < 4$ ، $-3 < 1 \rightarrow -3 + 3 < 1 + 3$)

بله، با اضافه کردن یک عدد دلخواه به دو طرف، نابرابری برقرار می‌ماند؛ مثلاً $4 > -6 \rightarrow 1 + 3 > 1 - 7$ و $-3 > -7 \rightarrow 5 > -98$ ، $3 > -100 \rightarrow 2 + 3 > 2 - 100$.

خاصیت ۱

اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند c جمع کنیم، نابرابری همچنان برقرار است؛ یعنی اگر a<b آنگاه a+c<b+c.

۲۰۲ صفحه ۹۲ **فعالیت**

۲ــ دو طرف نابرابری $7 > 9$ را در عددهای مختلف ضرب کنید؛ آیا نابرابری تغییر می‌کند؟

۳ــ نابرابری $7 > 2x + 1$ را در نظر بگیرید. در جدول زیر مقدارهای ۷، ۴، ۳، ۲، ۱-=x را قرار دهید؛ آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟ دو طرف را با ۱- جمع کنید و حاصل را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنید؛ مجموعه جواب را روی محور نشان دهید.

۲

ضرب در عدد مثبت نابرابری را حفظ می‌کند: $14 < 18 \rightarrow 2 \times 7 < 2 \times 9$ ؛ ضرب در عدد منفی جهت آن را برعکس می‌کند: $-7 > -9 \rightarrow (-1) \times 7 > (-1) \times 9$.

خاصیت ۲: اگر a<b و c>۰ آنگاه ac<bc. خاصیت ۳: اگر a<b و c<۰ آنگاه ac>bc.

۳

x	-۱	۲	۳	۴	۷
$2x + 1 > 7$	$-1 > 7$	$5 > 7$	$7 > 7$	$9 > 7$	$15 > 7$
درستی	نادرست	نادرست	نادرست	درست	درست

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$2x + 1 > 7 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$ ؛ مجموعه جواب $D = \{x \in R \mid x > 3\}$ است. روی محور از ۳ (نقطه‌ی توخالی) به سمت راست پررنگ می‌شود.

جهت نابرابری نامعادله از روی مقدار پاسخ‌ها بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰۳ صفحه ۹۳ کار در کلاس

مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید: الف) $2x + 7 \geq 15$ **ج)** $3(x - 1) \leq 2x + 1$ **د)** $\frac{2x+1}{3} - \frac{x}{4} \leq \frac{x-7}{6}$

- الف) $2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4$ ؛ $D = \{x \in R \mid x \geq 4\}$
- ج) $3x - 3 \leq 2x + 1 \Rightarrow x \leq 4$ ؛ $D = \{x \in R \mid x \leq 4\}$
- د) دو طرف را در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$4(2x + 1) - 3x \leq 2(x - 7) \Rightarrow 5x + 4 \leq 2x - 14 \Rightarrow 3x \leq -18 \Rightarrow x \leq -6$ ؛ $D = \{x \in R \mid x \leq -6\}$

عبارت (د) با تردید خوانده شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰۴ صفحه ۹۳ تمرین

۱ــ در جاهای خالی نمادهای < یا > را جایگزین کنید: الف) $a-b=1$ است؛ در این صورت a □ b. ب) $u-v=-2$؛ در این صورت u □ v.

۲ــ علامت عددهای حقیقی a و b و c را طوری تعیین کنید که نابرابری‌ها برقرار باشد: الف) $\frac{ac}{b^2} > 0$

۳ــ مجموعه جواب نامعادله‌ها را به دست آورید: الف) $2(x - 3) + 5 > 5 - x$ **ب)** $3 - 2x \leq 5(3 - 2x)$ **ج)** $\frac{y-3}{4} > \frac{y-1}{2}$

۴ــ اگر $a^2 > b^2$ **آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت a>b؟**

۵ــ اگر $a, b>0$ **و** $a^2 < b^2$ **، نشان دهید a<b (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید).**

۶ــ عبارت‌های کلامی را به زبان ریاضی بنویسید: الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می‌شود. ب) مجموع نصف عدد a و چهار برابر عدد b حداکثر ۶ واحد است.

۷ــ دو نفر با وزن‌های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند و موادغذایی‌ای با ۴۵۰۰ کیلوکالری انرژی دارند. اگر هر انسان روزانه حداقل به اندازه‌ی سه برابر وزن خود انرژی نیاز دارد، آنها حداکثر چند روز می‌توانند دوام بیاورند؟

۱

الف) $a - b = 1 > 0$ پس $a > b$ ؛ ب) $u - v = -2 < 0$ پس $v > u$.

۲ الف

چون $b^2 > 0$ ($b \neq 0$)، باید $ac > 0$ باشد؛ یعنی a و c هم‌علامت‌اند (هر دو مثبت یا هر دو منفی) و b هر عدد غیر صفر.

۳

- الف) $2x - 6 + 5 > 5 - x \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 2$
- ب) $3 - 2x \leq 15 - 10x \Rightarrow 8x \leq 12 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$
- ج) $y - 3 > 2y - 2 \Rightarrow y < -1$

۴

خیر؛ مثلاً $a=-3$ و $b=2$: $a^2 = 9 > 4 = b^2$ ولی $a<b$.

۵

$(b - a)(b + a) > 0 \Rightarrow b^2 - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < b^2$. چون a و b مثبت‌اند، $b+a>0$؛ پس باید $b-a>0$ باشد، یعنی $a<b$.

۶

الف) اگر پول علی x تومان باشد: $3x \geq 2x + 30000$ ؛ ب) $\frac{a}{2} + 4b \leq 6$.

۷

نیاز روزانه: $450 = 195 + 255 = 65 \times 3 + 85 \times 3$ کیلوکالری. تعداد روز: $10 = \frac{4500}{450}$ ؛ پس حداکثر ۱۰ روز.

قسمت‌های (د) نامعادله‌ی ۳ و بعضی قسمت‌های ۱ و ۲ در متن خوانا نبود و حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

توشه ای برای موفقیت

ریاضی نهم - فصل ششم

خط و معادله‌های خطی

فهرست

۲۰۵ صفحه ۹۶ · فعالیت — دوچرخه‌سواری با سرعت ثابت ۱۱۳

۲۰۶ صفحه ۹۷ · کار در کلاس — محیط و مساحت مربع ۱۱۳

۲۰۷ صفحه ۹۷ · فعالیت — معادله‌ی x+y=۱۰ ..... ۱۱۴

۲۰۸ صفحه ۹۸ · فعالیت — نمودار و معادله‌ی خط ۱۱۴

۲۰۹ صفحه ۹۹ · کار در کلاس — رسم خط ۱۱۵

۲۱۰ صفحه ۹۹ · فعالیت — پیدا کردن معادله‌ی خط از روی دو نقطه ... ۱۱۵

۲۱۱ صفحه ۱۰۰ · کار در کلاس — نقطه‌ی روی خط و محل برخورد با محورها ... ۱۱۶

۲۱۲ صفحه ۱۰۱ · تمرین — فنر، رشد قد و محل برخورد با محورها ... ۱۱۶

۲۱۳ صفحه ۱۰۲ · فعالیت — شیب خط و عرض از مبدأ ۱۱۷

۲۱۴ صفحه ۱۰۳ · کار در کلاس — شیب و عرض از مبدأ ۱۱۷

۲۱۵ صفحه ۱۰۳ · فعالیت — مفهوم شیب ۱۱۸

۲۱۶ صفحه ۱۰۴ · فعالیت — محاسبه‌ی شیب با مثلث قائم‌الزاویه ... ۱۱۸

۲۱۷ صفحه ۱۰۵ · فعالیت — صورت کلی معادله‌ی خط ۱۱۹

۲۱۸ صفحه ۱۰۶ · تمرین — خط‌های افقی و عمودی، شیب و عرض از مبدأ ... ۱۱۹

۲۱۹ صفحه ۱۰۷ · تمرین — معادله‌ی خط با شیب و نقطه ۱۲۰

۲۲۰ صفحه ۱۰۸ · فعالیت — دستگاه دو معادله و اشتراک اینترنت ... ۱۲۱

۲۲۱ صفحه ۱۰۹ · فعالیت — دو معادله‌ی هم‌ارز ۱۲۲

۲۲۲ صفحه ۱۰۹ · کار در کلاس — حل دستگاه با رسم خط ۱۲۲

۲۲۳ صفحه ۱۱۰ · کار در کلاس — حل دستگاه معادله‌ها ۱۲۲

۲۲۴ صفحه ۱۱۰ · فعالیت — روش حذفی ۱۲۳

۲۲۵ صفحه ۱۱۱ · فعالیت — روش جایگزینی و مسئله‌ی مستطیل ... ۱۲۳

۲۲۶ صفحه ۱۱۲ · کار در کلاس — حل دستگاه به روش جایگزینی ... ۱۲۴

۲۲۷ صفحه ۱۱۲ · تمرین — دستگاه معادله‌ها و مسئله‌ها ۱۲۴

irantooshe.ir

۲۰۵ صفحه ۹۶ فعالیت

دوچرخه‌سواری با سرعت ثابت دو متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه دو متر را طی می‌کند. جدول زیر را کامل کنید (زمان x بر حسب ثانیه، مسافت y بر حسب متر برای x = ۰، ۱، ۱/۵، ۲، ۳، ۳/۵، ۴، ۵). بین زمان و مسافت طی‌شده چه رابطه‌ای هست؟ پس از ۱۰۰ ثانیه چه مسافتی طی شده است؟ اگر x ثانیه بگذرد، چه مسافتی طی شده است؟ زوج‌عددهایی را که در جدول به دست آوردید به‌صورت (x, y) روی نمودار مشخص کنید؛ این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ اگر این نقطه‌ها را به هم وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟

زمان x (ثانیه)	۰	۱	۱/۵	۲	۳	۳/۵	۴	۵
مسافت y (متر)	۰	۲	۳	۴	۶	۷	۸	۱۰

مسافت دو برابر زمان است: $y = 2x$. پس از ۱۰۰ ثانیه: $2 \times 100 = 200$ متر. پس از x ثانیه: $y = 2x$ متر.

نقطه‌های (۰،۰)، (۱،۲)، (۲،۴)، (۳،۶)، ... همه روی یک خط راست قرار می‌گیرند و مختصات همه‌ی آنها در رابطه‌ی $y = 2x$ صدق می‌کند. اگر آنها را به هم وصل کنیم، پاره‌خط (یا نیم‌خطی) راست که از مبدأ مختصات می‌گذرد به دست می‌آید.

۲۰۶ صفحه ۹۷ کار در کلاس

۱ــ اگر طول ضلع یک مربع را با x و محیط آن را با y نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین x و y هست؟ (برای x = ۱، ۲، ۳، ۴، ...، ۱۰۰)

۲ــ اگر طول ضلع یک مربع را با x و مساحت مربع را با y نشان دهیم، بین x و y چه رابطه‌ای هست؟ پس از کامل کردن جدول (x = ۰، ۰/۵، ۱، ۱/۵، ۲، ۲/۵، ۳)، هر نقطه را روی نمودار پیدا کنید. آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟

۱) $y = 4x$؛ برای x=۱، ۲، ۳، ۴، ...، ۱۰۰ به‌ترتیب y=۴، ۸، ۱۲، ۱۶، ...، ۴۰۰.

۲)

x (سانتی‌متر)	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳
y (سانتی‌متر مربع)	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	۴	۶/۲۵	۹

رابطه: $y = x^2$. نقطه‌های (۰،۰)، (۰/۵،۰/۲۵)، (۱،۱)، (۱/۵،۲/۲۵)، (۲،۴)، ... روی یک خط راست نیستند (روی منحنی قرار دارند)؛ چون با افزایش x، y با سرعت بیشتری زیاد می‌شود.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۰۷ صفحه ۹۷ فعالیت

۱ــ معادله‌ی x + y = ۱۰ چند پاسخ دارد؟ پنج پاسخ آن را بنویسید (x = ۰، ۱، ۲، ۳، ۴). توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد؟ آیا تساوی برای x=۲ و y=۵ برقرار است؟ توضیح دهید چرا این تساوی معادله است و اتحاد نیست؟

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱۰	۹	۸	۷	۶

معادله بی‌شمار پاسخ دارد؛ برای هر مقدار دلخواه x کافی است y = 10 - x را حساب کنیم.

برای x=۲ و y=۵ داریم ۲+۵=۷ ≠ ۱۰؛ پس تساوی برقرار نیست.

این تساوی فقط برای بعضی مقدارهای x و y (مثل آنهایی که مجموعشان ۱۰ است) درست است و برای همه‌ی مقدارها برقرار نیست؛ پس معادله است، نه اتحاد.

۲۰۸ صفحه ۹۸ فعالیت

۲ــ در شکل زیر نمودار یک خط داده شده است. جدول زیر را با توجه به نمودار خط کامل کنید (طول نقطه x = -۲، -۱، ۰، ۱، ۲). بین طول و عرض نقطه‌ها چه رابطه‌ای هست؟ این رابطه را به‌صورت یک معادله بنویسید.

۳ــ پنج جواب برای هر یک از معادله‌های 3x - 4y = 12 و y = 2x - 1 بنویسید. توضیح دهید که پیدا کردن جواب در معادله‌ی سمت راست ساده‌تر و سریع‌تر است یا در معادله‌ی سمت چپ؟

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۰	۱	۲	۳	۴

رابطه: عرض = طول + ۲؛ یعنی y = x + 2 (خطی با ضریب ۱ و عدد ثابت ۲).

شکل نمودار دیده نشد؛ بر اساس متن بعدی کتاب (خط y=x+۲) حل شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳

معادله	پنج جواب (x, y)
y = 2x - 1	(۰,-۱) ، (۱,۱) ، (۳,۵) ، (-۱,-۳) ، (۲,۳)
3x - 4y = 12	(۰,-۳) ، (۴,۰) ، (۸,۳) ، (-۴,-۶) ، (۲,-۱/۵)

پیدا کردن جواب در معادله‌ی $y = 2x - 1$ ساده‌تر است؛ چون y بر حسب x نوشته شده و با دادن یک مقدار دلخواه به x مستقیماً y به دست می‌آید؛ ولی در $3x - 4y = 12$ باید پس از جایگزینی x معادله‌ای برای y حل شود.

۲۰۹ صفحه ۹۹ **کار در کلاس**

۱ــ نمودار خط‌هایی با معادله‌های $y = -x + 3$ و $y = \frac{3}{2}x + 2$ را رسم کنید.

۲ــ آیا خط $y = 3x$ از مبدأ مختصات (یعنی نقطه‌ی (۰،۰)) می‌گذرد؟ چرا؟

۳ــ اگر در معادله‌ی $y = ax$ به‌جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، بی‌شمار معادله‌ی خطی مانند $y = 3x$، $y = -2x$، $y = x$ و ... به دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؟

۱

برای رسم هر خط کافی است دو نقطه‌ی آن را پیدا کنیم و به هم وصل کنیم: برای $y = -x + 3$ نقطه‌های (۰،۳) و (۳،۰)؛ برای $y = \frac{3}{2}x + 2$ نقطه‌های (۰،۲) و (۲،۵) (یا (−۲،−۱)).

۲

بله؛ به‌ازای $x=0$ داریم $y=3\times0=0$؛ پس (۰،۰) روی خط است.

۳

بله؛ برای هر a به‌ازای $x=0$ داریم $y=a\times0=0$؛ پس همه‌ی خط‌های $y=ax$ از مبدأ مختصات می‌گذرند. صورت کلی معادله‌ی خط‌هایی که از مبدأ می‌گذرند $y=ax$ است.

ضریب x در معادله‌ی دوم قسمت ۱ با تردید خوانده شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱۰ صفحه ۹۹ **فعالیت**

۱ــ در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه ($y = 2x$) با توجه به مختصات هر نقطه معادله‌ی خط را حدس بزنید. ۲ــ در فعالیت ۱ برای هر مورد، مختصات دو نقطه‌ی دیگر را روی هر خط به دست آورید.

اگر خط از مبدأ (۰،۰) و نقطه‌ی (a,b) بگذرد، عرض هر نقطه برابر $\frac{b}{a}$ برابر طول آن است؛ پس معادله‌ی خط $y = \frac{b}{a}x$ است. مثلاً اگر خط از (۰،۰) و (۱،۲) بگذرد: $y = 2x$ و نقطه‌های دیگر آن (۲،۴) و (−۱،−۲) هستند؛ برای (۰،۰) و (−۱،۱): $y = -x$ و برای (۰،۰) و (۱،۳): $y = 3x$.

نقطه‌های هر مورد در متن خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۱۱ صفحه ۱۰۰ کار در کلاس

۱ــ مختصات نقطه‌ای به طول ۲ را روی خط $y = 2x - 1$ پیدا کنید. ۳ــ مختصات محل برخورد خط $y = 5x + 1$ را با محورهای مختصات پیدا کنید.

۱) $y = 2 \times 2 - 1 = 3$ ؛ نقطه‌ی (۲,۳).

۳) محور عرض‌ها ($x=0$): $y = 1 \leftarrow (0,1)$. محور طول‌ها ($y=0$): $x = -\frac{1}{5} \Rightarrow 0 = 5x + 1 \leftarrow \left(-\frac{1}{5}, 0\right)$.

قسمت ۲ (نقطه‌ای به عرض ۳-) در متن خوانا نبود و حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱۲ صفحه ۱۰۱ تمرین

۲ــ طول یک فنر ۱۰ سانتی‌متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطه‌ی $y = 0.8x + 10$ پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟

۳ــ کدام‌یک از نمودارهای زیر رابطه‌ی رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می‌دهد؟ با توجه به وضعیت‌های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید؛ برای مثال بگویید محل برخورد نمودار با محور y به چه معناست؟

۵ــ مختصات محل برخورد خط $y = -x + 2$ را با محورهای مختصات بیابید.

۲

$y = 0.8 \times 5 + 10 = 4 + 10 = 14$ ؛ طول فنر ۱۴ سانتی‌متر می‌شود.

۳

نمودار رشد قد از ارتفاعی مثبت روی محور y شروع می‌شود (محل برخورد با محور y قد نوزاد هنگام تولد است، حدود ۵۰ سانتی‌متر)، در سال‌های اول سریع بالا می‌رود، بعد کندتر می‌شود و در بزرگسالی تقریباً ثابت (افقی) می‌ماند. هیچ‌گاه کاهشی نیست.

۵

$y=2 \leftarrow x=0$ ؛ نقطه‌ی (۰,۲). $x=2 \leftarrow y=0$ ؛ نقطه‌ی (۲,۰).

نمودارهای پرسش ۳ دیده نشد و قسمت‌های ۴ و ۶ و ۷ در متن خوانا نبود و حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱۳ صفحه ۱۰۲ فعالیت

۱ــ خط‌هایی به معادله‌های (الف) $y=\frac{1}{2}x$ (ب) $y=x$ (ج) $y=۳x$ (د) $y=-x$ (هـ) $y=-۲x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ تمام این خط‌ها از مبدأ می‌گذرند؛ تفاوت آنها در چیست؟ زاویه‌ی هر خط را با قسمت مثبت محور طول‌ها مشخص کنید. در خط‌های الف، ب و ج چه رابطه‌ای بین ضریب x و این زاویه وجود دارد؟ خط‌های د و هـ چه نوع زاویه‌ای با جهت مثبت محور xها می‌سازند؟

۲ــ خط‌هایی به معادله‌های $y=۲x+۳$ ، $y=۲x$ ، $y=۲x-۱$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. تفاوت خط‌ها در چیست؟ زاویه‌ی خط‌ها را با محور xها مقایسه کنید؛ چرا این خط‌ها با هم موازی‌اند؟ بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد ثابت معادله چه رابطه‌ای می‌بینید؟

۱

همه از مبدأ می‌گذرند ولی «تندی» آنها (زاویه با محور xها) فرق دارد: هرچه ضریب x بزرگ‌تر باشد، خط تندتر است؛ یعنی در خط‌های الف، ب و ج (ضریب $۳ > ۱ > ۱/۲$) زاویه با جهت مثبت محور xها به‌ترتیب بزرگ‌تر می‌شود (زاویه‌ی تند، افزایشی). خط‌های د و هـ (ضریب منفی) با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی باز (بزرگ‌تر از ۹۰°) می‌سازند.

۲

هر سه خط ضریب x برابر ۲ دارند؛ پس زاویه‌شان با محور xها یکی است و با هم موازی‌اند؛ تفاوت آنها فقط در محل برخورد با محور yهاست: $(۰,-۱)$، $(۰,۰)$ و $(۰,۳)$؛ یعنی همان عدد ثابت معادله.

در معادله‌ی $y=ax+b$ ، a را شیب خط و b را عرض از مبدأ می‌نامیم؛ مثلاً در $y=-3x+2$ شیب ۳- و عرض از مبدأ ۲ است.

۲۱۴ صفحه ۱۰۳ کار در کلاس

۱ــ در هر یک از معادله‌های زیر، شیب و عرض از مبدأ خط را مشخص کنید: $y=2x-4$ ، $y=\frac{2}{3}x-2$ ، $y=-3x+1$

۲ــ معادله‌ی خطی را بنویسید که: الف) شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن ۱- باشد. ب) شیب آن ۱/۲ باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند. ج) با خط $y=2x+1$ موازی باشد و از نقطه‌ی (۰,۴) بگذرد.

۳ــ معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطه‌ی (۱,۲) بگذرد.

۱

- $y=2x-4$: شیب ۲ ، عرض از مبدأ ۴-
- $y=\frac{2}{3}x-2$: شیب $\frac{2}{3}$ ، عرض از مبدأ ۲-

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

- $y = -3x + 1$: شیب ۳- ، عرض از مبدأ ۱

۲

- الف) $y = -2x - 1$
- ب) $y = \frac{1}{2}x + 3$
- ج) شیب ۲ و عرض از مبدأ ۴: $y = 2x + 4$

۳

$y = 2x + b$ و نقطه‌ی (۱،۲): $2 = 2 \times 1 + b \Rightarrow b = 0$ ؛ پس $y = 2x$.

ضریب و عرض از مبدأ معادله‌ی دوم قسمت ۱ با تردید خوانده شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۱۵ صفحه ۱۰۳ **فعالیت**

۱ــ در تصویر، سه راه‌پله می‌بینید؛ در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می‌روید یکسان است. کدام راه‌پله شیب بیشتری دارد؟ کدام‌یک تعداد پله‌ی بیشتری دارد؟ بالا رفتن از کدام ساده‌تر است؟

۲ــ در محورهای مختصات مقابل، کدام خط شیب بیشتری دارد؟ نقطه‌های A و B طول ثابتی دارند ولی عرض آنها متفاوت است. کدام‌یک از دو نسبت $\frac{AH}{OH}$ و $\frac{BH}{OH}$ بزرگ‌تر است؟ چرا؟ این دو نسبت چه ارتباطی با شیب خط‌ها دارد؟

راه‌پله‌ای که طول افقی کمتر (کوتاه‌تر و تندتر) و تعداد پله‌ی کمتر دارد شیب بیشتری دارد و بالا رفتن از آن سخت‌تر است؛ راه‌پله‌ی طولانی‌تر با پله‌های بیشتر شیب کمتری دارد و بالا رفتن از آن آسان‌تر است. هر چه ارتفاع نسبت به طول افقی بیشتر باشد، شیب بیشتر است.

خطی که بالاتر می‌رود (B به‌جای A) شیب بیشتری دارد. چون طول نقطه‌ها (OH) یکی است و عرض B بزرگ‌تر است: $\frac{BH}{OH} > \frac{AH}{OH}$ ؛ این نسبت‌ها همان شیب خط‌ها هستند (شیب = عرض ÷ طول).

شکل‌های این فعالیت دیده نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۱۶ صفحه ۱۰۴ **فعالیت**

۳ــ روی خط $d_1 : y = 2x - 1$ دو نقطه‌ی دلخواه مثل A و B در نظر گرفته‌ایم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه‌ی ایجادشده شیب خط را به دست آورده‌ایم: $\frac{EB}{EA} = \frac{4}{2} = 2$. برای دو نقطه‌ی C و D نیز شیب را پیدا کنید و با دو نقطه‌ی دلخواه دیگر دوباره شیب را به دست آورید.

۴ــ خط d_2 با محور طول، زاویه‌ی بزرگ‌تر از ۹۰° می‌سازد؛ پس شیب خط منفی می‌شود. خط d_2 محور عرض‌ها را در نقطه‌ی (۰،۱) قطع کرده است. معادله‌ی خط d_2 را بنویسید.

۵ــ با توجه به شیب خط، روش رسم خط $y = 2x - 1$ را توضیح دهید.

۳) شیب خط هر دو نقطه‌ی آن را در نظر بگیریم، همیشه $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ است؛ مثلاً (۱,۱) و (۳,۵): $\frac{5-1}{3-1} = 2$ و (۰,−۱) و (۲,۳): $\frac{3-(-1)}{2-0} = 2$؛ شیب یک خط به انتخاب نقطه‌ها بستگی ندارد.

۴) معادله‌ی d_2 به شکل $y = ax + 1$ است که a شیب منفی آن است (مقدار آن از روی مثلث رسم‌شده: $a = -\frac{EB}{EA}$).

۵) ابتدا نقطه‌ی (۰,−۱) را که عرض از مبدأ است روی محور y علامت می‌زنیم؛ چون شیب ۲ است، از این نقطه ۱ واحد به راست و ۲ واحد بالا می‌رویم و نقطه‌ی (۱,۱) را به دست می‌آوریم؛ خط گذرنده از این دو نقطه، نمودار $y = 2x - 1$ است.

مقدار شیب d_2 و شکل‌ها در متن خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱۷ صفحه ۱۰۵ **فعالیت**

۲ــ صورت کلی معادله‌های خطی به‌صورت $ax + by = c$ است. الف) با توجه به مقدارهای نوشته‌شده، معادله‌ی خط را بنویسید؛ کدام خط از مبدأ می‌گذرد؟ (a=۲, b=۳, c=۴) و (a=−۱, b=۲, c=۰) ب) با توجه به خط‌های داده‌شده، مقدارهای a و b و c را پیدا کنید: $-3x + 2y = 2$ و $y = 2x + 1$ ج) برای خط x=۲ مقدارهای a و b و c را بنویسید.

- الف) $2x + 3y = 4$ و $-x + 2y = 0$؛ خط دوم از مبدأ می‌گذرد (چون c=۰).
- ب) $-3x + 2y = 2$: $c=2$ ، $b=2$ ، $a=-3$؛ $y = 2x + 1 \Rightarrow -2x + y = 1$: $c=1$ ، $b=1$ ، $a=-2$.
- ج) $2 = y \cdot 0 + x \cdot 1 \Rightarrow x = 2$: $c=2$ ، $b=0$ ، $a=1$ (خط عمودی).

تمام نقطه‌هایی که طول آنها ۲ است روی خط x=۲ قرار می‌گیرند (خطی موازی محور yها).

نقطه‌ها و شکل قسمت‌های ۱ و ۳ این فعالیت دیده نشد و حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱۸ صفحه ۱۰۶ **تمرین**

۱ــ خط‌های به معادله‌ی y=۳ و x=−۲ را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه‌ی بین این دو خط چند درجه است؟

۲ــ معادله‌ی محور طول‌ها و محور عرض‌ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه‌ای است؟

۳ــ شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را پیدا و سپس آن خط‌ها را رسم کنید: $2x - y = 3$ ، $4x - 2y = 8$ ، $3y - 2x = 6$

۴ــ مانند نمونه برای خط‌های داده‌شده شیب و عرض از مبدأ را پیدا کنید: $y = 2x + 4$ ، $3x - 2y = 6$ ، $x + 3y - 9 = 0$

۱

خط $y=۳$ افقی و خط $x=-۲$ عمودی است؛ محل برخورد $(-۲,۳)$ و زاویه‌ی بین آنها ۹۰° است.

۲

محور طول‌ها: $y=۰$ ؛ محور عرض‌ها: $x=۰$ ؛ محل برخورد: مبدأ $(۰,۰)$.

۳

معادله	شکل $y = ax + b$	شیب	عرض از مبدأ
$2x - y = 3$	$y = 2x - 3$	۲	-۳
$4x - 2y = 8$	$y = 2x - 4$	۲	-۴
$3y - 2x = 6$	$y = \frac{2}{3}x + 2$	$\frac{2}{3}$	۲

هر خط را با دو نقطه (مثلاً نقطه‌های برخورد با محورها) رسم می‌کنیم؛ خط اول و دوم موازی‌اند (شیب مساوی).

۴

خط	شیب	عرض از مبدأ
$y = 2x + 4$	۲	۴
$3x - 2y = 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$	$\frac{3}{2}$	-۳
$x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 3$	$-\frac{1}{3}$	۳

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۱۹ صفحه ۱۰۷ تمرین

۶ــ معادله‌ی خطی بنویسید که با خط $2y - 4x = 5$ **موازی باشد و از نقطه‌ی** $(-۱,۱)$ **بگذرد.**

۷ــ با توجه به شکل نشان دهید: شیب خط = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **(دو نقطه‌ی** $A(x_1, y_1)$ **و** $B(x_2, y_2)$**).**

۶

$2y - 4x = 5 \Rightarrow y = 2x + \frac{5}{2}$ شیب ۲ دارد؛ خط موازی: $y = 2x + b$. نقطه‌ی $(-۱,۱)$: $1 = -2 + b \Rightarrow b = 3$ ؛ پس $y = 2x + 3$.

مختصات نقطه‌ی این پرسش با تردید خوانده شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷

از A خطی افقی و از B خطی عمودی رسم می‌کنیم تا در C برخورد کنند؛ مثلث ABC قائم‌الزاویه است با ضلع افقی $x_2 - x_1$ و ضلع عمودی $y_2 - y_1$. شیب خط برابر عرض‌افزایی تقسیم بر طول‌افزایی است: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

---

۲۲۰ صفحه ۱۰۸ **فعالیت**

۱ــ هزینه‌ی اشتراک یک خط اینترنت روی تلفن همراه ۳۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است. هزینه‌ی کل x ساعت استفاده از اینترنت را با y نشان دهید و رابطه‌ای بین y و x بنویسید. یک نوع دیگر از اشتراک اینترنت بدون مبلغ ثابت است؛ ولی برای هر ساعت استفاده ۳۰۰۰ تومان هزینه دارد. رابطه‌ای بین هزینه‌ی اشتراک (y) و x ساعت را در این حالت بنویسید. دو خط را رسم کنید (y بر حسب هزار تومان). محل برخورد این دو خط چه ویژگی‌ای دارد؟ برای ۱/۵ ساعت استفاده کدام نوع اشتراک بهتر است؟ بعد از چند ساعت استفاده اشتراک نوع اول به صرفه خواهد بود؟

۲ــ معادله‌ی $y = 2x - 1$ چند جواب دارد؟ نمودار آن را رسم کنید. معادله‌ی $y = -x + 2$ چند جواب دارد؟ نمودار آن را رسم کنید. توضیح دهید چگونه یک جواب مشترک برای این دو معادله پیدا می‌کنید.

اشتراک اول: $y = 2x + 3$ ؛ اشتراک دوم: $y = 3x$ (y بر حسب هزار تومان و x بر حسب ساعت).

محل برخورد: $2x + 3 = 3x \Rightarrow x = 3,\ y = 9$ ؛ نقطه‌ی $(۳,۹)$ یعنی پس از ۳ ساعت هزینه‌ی هر دو اشتراک برابر (۹۰۰۰ تومان) است.

برای ۱/۵ ساعت: اشتراک اول $2(1.5) + 3 = 6$ (۶۰۰۰ تومان) و دوم $3(1.5) = 4.5$ (۴۵۰۰ تومان)؛ پس اشتراک دوم بهتر است. بیش از ۳ ساعت استفاده، اشتراک نوع اول به‌صرفه‌تر است.

۲

هر دو معادله بی‌شمار جواب دارند و نمودار هرکدام یک خط است. جواب مشترک، نقطه‌ی برخورد دو خط است: $2x - 1 = -x + 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1,\ y = 1 \leftarrow (۱,۱)$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۲۱ صفحه ۱۰۹ — فعالیت

۱ــ خط $2x - 3y = 4$ را رسم کنید. خط $4x - 6y = 8$ را، که در آن تمام عددهای معادله‌ی بالا دو برابر شده است، رسم کنید. الف) آیا خط جدیدی به دست آمد؟ ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر تمام ضرایب یک معادله‌ی خطی را در یک عدد ضرب کنیم، ... ج) آیا می‌توان گفت این دستگاه معادله‌ی خطی بی‌شمار جواب دارد؟ چرا؟

- الف) خیر؛ هر دو معادله یک خط را نمایش می‌دهند.
- ب) اگر تمام ضرایب یک معادله‌ی خطی را در یک عدد غیر صفر ضرب کنیم، خط را عوض نکرده‌ایم (معادله‌ی هم‌ارز).
- ج) بله؛ چون دو خط بر هم منطبق‌اند و تمام نقطه‌های خط جواب هر دو معادله است، دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۲۲۲ صفحه ۱۰۹ — کار در کلاس

با رسم خط‌ها، دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید؛ یعنی یک جواب مشترک برای دو معادله پیدا کنید:

دستگاه (۱) $x + y = 3 \ , \ x - y = 1$

خط $x - y = 1$ از نقطه‌های (۱,۰) و (۰,−۱) و خط $x + y = 3$ از (۳,۰) و (۰,۳) می‌گذرد؛ این دو خط در نقطه‌ی (۲,۱) یکدیگر را قطع می‌کنند؛ جواب دستگاه: $x = 2, \ y = 1$ (بررسی: ۲−۱=۱ و ۲+۱=۳).

دستگاه دوم این کار در کلاس در متن خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۲۳ صفحه ۱۱۰ — کار در کلاس

دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید: ۱) $4x + 2y = 6 \ , \ x - y = 3$ **۲)** $2x + 3y = 7 \ , \ 3x - 5y = 1$ **۳)**

$2x + 2y = 35 \ , \ 3x + 2y = 50$

۱) $x = 2, \ y = -1 \Rightarrow 4y + 12 + 2y = 6 \Rightarrow x = y + 3$ ؛ جواب (۲,−۱).

۲) معادله‌ی اول را در ۳ و دوم را در ۵ ضرب می‌کنیم: $9x - 15y = 3$ و $10x + 15y = 35$ ؛ جمع:

$19x = 38 \Rightarrow x = 2$ ؛ $y = 1$ ؛ جواب (۲,۱).

۳) تفریق دو معادله: $x = 15$ ؛ $2(15) + 2y = 35 \Rightarrow y = 2.5$ ؛ جواب (۱۵, ۲/۵).

ضریب‌های معادله‌ها با تردید خوانده شد (جواب‌ها در معادله‌ها بررسی شد). این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۲۴ صفحه ۱۱۰ فعالیت

۲ــ به مثال‌های زیر توجه کنید (ترازو): الف) اگر دو تساوی را با هم جمع کنیم؛ ب) اگر دو طرف تساوی را در یک عدد ضرب کنیم؛ ج) اگر دو تساوی را از هم کم کنیم. از این مثال چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳ــ با توجه به نتیجه‌هایی که از سؤال‌های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله‌های زیر حل شده است: الف) $x + y = 3 \ , \ x - y = 1$ **← جواب (۲,۱) ب)** $x + 2y = 4 \ , \ x + y = 3$ **← جواب (۲,۱).**

نتیجه: (۱) اگر دو تساوی را با هم جمع کنیم، تساوی حاصل برقرار است؛ (۲) اگر دو طرف یک تساوی را در یک عدد ضرب کنیم تساوی برقرار می‌ماند؛ (۳) اگر دو تساوی را از هم کم کنیم، باز تساوی برقرار است.

الف) دو معادله را با هم جمع کرده‌ایم تا y حذف شود: $2x = 4 \Rightarrow x = 2$ ؛ سپس $2 + y = 3 \Rightarrow y = 1$.

ب) معادله‌ی اول را از دوم کم کرده‌ایم تا x حذف شود: $y = 1$ ؛ سپس $x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$.

یکی از راه‌های حل دستگاه معادله‌های خطی حذف کردن x یا y است تا به یک معادله‌ی یک‌مجهولی برسیم؛ این روش «حذفی» نام دارد.

شکل‌های ترازو دیده نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۲۵ صفحه ۱۱۱ فعالیت

۲ــ «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی‌متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش‌آموز حل شده است. روش‌های هر کدام را توضیح دهید و کامل کنید. بین روش‌های اول و سوم چه شباهتی هست؟

روش ۱: عرض x و طول $2x - 3$ ؛ محیط: $2(x + 2x - 3) = 24 \Rightarrow 3x - 3 = 12 \Rightarrow x = 5$ ؛ طول $2 \times 5 - 3 = 7$.

روش ۲: عرض x و طول y: $y = 2x - 3$ و $2(x + y) = 24 \Rightarrow x + y = 12$ ؛ دو معادله را کم می‌کنیم: $x + y - (y - 2x) = 12 - (-3) \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5, \ y = 7$ (روش حذفی).

روش ۳: y را از معادله‌ی اول در محیط جایگزین می‌کنیم: $2(x + 2x - 3) = 24$ و به همان جواب x=۵ و y=۷ می‌رسیم (روش جایگزینی).

شباهت روش‌های اول و سوم: در هر دو طول را بر حسب عرض نوشته‌ایم و در معادله‌ی محیط قرار داده‌ایم تا یک معادله‌ی یک‌مجهولی به دست آید. عرض ۵ و طول ۷ سانتی‌متر است (بررسی: ۲×(۵+۷)=۲۴).

۱ (روش جایگزینی)

در روش جایگزینی ابتدا یک متغیر را بر حسب متغیر دیگر از یک معادله به دست می‌آوریم و در معادله‌ی دیگر قرار می‌دهیم تا معادله‌ی یک‌مجهولی به دست آید.

دستگاه قسمت ۱ این فعالیت در متن خوانا نبود و حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۲۶ صفحه ۱۱۲ کار در کلاس

دستگاه‌های زیر را به روش جایگزینی حل کنید: ۱) $x - 3y = 7\ ,\ 2x - 7y = 15$

$x = 3y + 7 \Rightarrow 2(3y + 7) - 7y = 15 \Rightarrow -y + 14 = 15 \Rightarrow y = -1$ ؛ $x = -3 + 7 = 4$ ؛ جواب (۴،-۱).

ضریب‌های دستگاه اول با تردید خوانده شد و دستگاه (۲) در متن خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۲۷ صفحه ۱۱۲ تمرین

۲ــ یک جواب برای x و y طوری تعیین کنید که تساوی $2x - y - 2 = 3x + y - 1$ **برقرار باشد.**

۴ــ در معادله‌ی $y = ax + 1$ **اگر به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، معادله‌ی خط‌های زیادی به دست می‌آید. به‌ازای a=۱ و a=۲ و a=−۱ این خط‌ها را رسم کنید؛ این خط‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟**

۵ــ در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. پاهای آنها ۵۶ عدد است. در این مزرعه چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد)

۶ــ دستگاه معادله‌ی خطی $2x - 3y = 7\ ,\ 4x - 6y = 5$ **را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید. آیا این دستگاه جواب دارد؟ شیب هر دو خط را به دست آورید. توضیح دهید چرا نقطه‌ی مشترکی به‌عنوان جواب معادله به دست نمی‌آید.**

۷ــ مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل دستگاه معادلات به دست آورید.

۲

$2x - y - 2 = 3x + y - 1 \Rightarrow -x - 2y = 1$ ؛ مثلاً y=۰ و x=−۱: $-2 - 0 - 2 = -4$ و $-3 + 0 - 1 = -4$.

۴

هر سه خط $y = x + 1$ ، $y = 2x + 1$ ، $y = -x + 1$ از نقطه‌ی (۰،۱) می‌گذرند (عرض از مبدأ همه ۱ است) و شیب‌هایشان فرق می‌کند.

۵

x شترمرغ و y گاو: $x + y = 20$ و $2x + 4y = 56 \Rightarrow x + 2y = 28$ ؛ تفریق: $x = 12,\ y = 8$ ؛ ۱۲ شترمرغ و ۸ گاو (بررسی: ۲۴+۳۲=۵۶).

۶

روش حذفی: معادله‌ی اول را در ۲ ضرب می‌کنیم: $4x - 6y = 14$ و با معادله‌ی دوم $4x - 6y = 5$ ناسازگار است (۱۴=۵ نادرست)؛ پس جواب ندارد. شیب هر دو خط $\frac{2}{3}$ است؛ پس خط‌ها موازی‌اند و هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.

۷

$x + y = 70,\ y - x = 26 \Rightarrow 2y = 96 \Rightarrow y = 48,\ x = 22$ ؛ سن علی ۲۲ و پدرش ۴۸ سال است.

پرسش‌های ۱ و ۳ (عبارت‌ها در متن خوانا نبود) حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی نهم - فصل هفتم

عبارت‌های گویا

فهرست

۲۲۸ صفحه ۱۱۵ · کار در کلاس — تشخیص عبارت گویا ۱۲۷

۲۲۹ صفحه ۱۱۵ · فعالیت — مقدار عددی عبارت گویا ۱۲۷

۲۳۰ صفحه ۱۱۶ · فعالیت — ساده کردن عبارت گویا ۱۲۷

۲۳۱ صفحه ۱۱۶ · کار در کلاس — مقدارهای نامعتبر متغیر ۱۲۸

۲۳۲ صفحه ۱۱۷ · کار در کلاس — ساده کردن عبارت گویا ۱۲۸

۲۳۳ صفحه ۱۱۸ · تمرین — ساده کردن عبارت‌ها و عبارت‌های مساوی ... ۱۲۸

۲۳۴ صفحه ۱۲۳ · فعالیت — مسئله‌ی مربع در مستطیل ۱۲۹

۲۳۵ صفحه ۱۲۵ · تمرین — ساده‌سازی و مسئله‌های عبارت گویا ... ۱۲۹

۲۳۶ صفحه ۱۲۷ · کار در کلاس — تقسیم چندجمله‌ای‌ها ۱۳۰

۲۳۷ صفحه ۱۳۰ · تمرین — تقسیم و بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها ... ۱۳۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲۸ صفحه ۱۱۵ | کار در کلاس

کدام‌یک از عبارت‌های داده‌شده (کسرهایی با صورت و مخرج جبری) گویاست؟ چرا؟

عبارت گویا کسری است که صورت و مخرج آن هر دو چندجمله‌ای باشند (مخرج غیر صفر). پس عبارت‌هایی مثل $\frac{x-7}{1}$ ، $\frac{2}{x+3}$ ، $\frac{x+1}{x^2-5}$ گویایند؛ ولی کسری که در صورت یا مخرج آن قدر مطلق ($|x|$ یا $|x-y|$)، رادیکالِ متغیر یا متغیر در توان باشد (مثل $\frac{|x|}{x+1}$)، چندجمله‌ای نیست و کسر گویا نیست.

فرمول‌های این پرسش در متن خوانا نبود و از روی ساختار تمرین بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۲۹ صفحه ۱۱۵ | فعالیت

مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به ازای عددهای $x = -۱۰ ، -۵ ، ۱ ، ۲ ، ۷$ به دست آورید. به ازای $x=۳$ چه اتفاقی می‌افتد؟

x	-۱۰	-۵	۱	۲	۷
مقدار عبارت	$\frac{-5}{-13}=\frac{5}{13}$	$\frac{0}{-8}=0$	$\frac{6}{-2}=-3$	$\frac{7}{-1}=-7$	$\frac{12}{4}=3$

به ازای $x=۳$ مخرج صفر می‌شود ($\frac{8}{0}$) و عبارت تعریف نمی‌شود؛ چون تقسیم بر صفر معنا ندارد. برای تعیین مقدارهای مجاز باید مقدارهایی از متغیر را که مخرج را صفر می‌کند حذف کنیم.

فرم عبارت از روی مقدار ۸ در متن بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳۰ صفحه ۱۱۶ | فعالیت

هر یک از عبارت‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است، راه‌حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید): الف) $\frac{18y^3}{60y^5}$ ب) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3}$

- الف) صورت و مخرج را بر ب.م.م آنها ($6y^3$) تقسیم می‌کنیم: $\frac{18y^3}{60y^5}=\frac{3}{10y^2}$.
- ب) صورت را با اتحاد مربع دو جمله‌ای و مخرج را با اتحاد جمله‌ی مشترک تجزیه می‌کنیم:

$\frac{(x+3)^2}{(x+1)(x+3)}=\frac{x+3}{x+1}$ ($x\neq -۱$ و -۳).

فرمول‌های این پرسش در متن خوانا نبود و از روی ساختار تمرین بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳۱ صفحه ۱۱۶ — کار در کلاس

هر یک از عبارت‌های گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از متغیرها تعریف نشده است؟ الف) $\frac{5}{x+8}$ (و عبارت‌های دیگر کار در کلاس)

مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم: $x+8=0 \Rightarrow x=-8$ ؛ عبارت الف به ازای $x=-۸$ تعریف نشده است.

برای مخرج‌های حاصل‌ضربی (مانند $(x+2)(x-1)$) هر عامل را جداگانه صفر می‌کنیم: $x=۱$ و $x=-۲$.

بقیه‌ی عبارت‌ها در متن خوانا نبود و حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳۲ صفحه ۱۱۷ — کار در کلاس

۱ــ عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید: ب) $\frac{6m+18}{7m+21}$ ج) $\frac{a^2-5a-14}{a^2+a-2}$ د) $\frac{4x-4y}{y-x}$

۲ــ عبارت $\frac{ax+a}{a}$ به دو شکل ساده شده؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

- ب) $\frac{6(m+3)}{7(m+3)}=\frac{6}{7}$
- ج) $\frac{(a-7)(a+2)}{(a+2)(a-1)}=\frac{a-7}{a-1}$
- د) $\frac{4(x-y)}{-(x-y)}=-4$

۲

ساده‌کردن درست: $\frac{a(x+1)}{a}=x+1$ (ابتدا فاکتور می‌گیریم و بعد حذف می‌کنیم). حذف a فقط از یک جمله (مثلاً a در ax) نادرست است؛ چون فقط عامل‌های مشترک صورت و مخرج (نه جمله‌ها) حذف می‌شوند.

فرمول‌های این پرسش در متن خوانا نبود و از روی ساختار تمرین بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳۳ صفحه ۱۱۸ — تمرین

۲ــ حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید: ب) $\frac{x^2+5x+6}{4x+8}$

۳ــ عبارت‌هایی را که حاصل آنها ۱ و یا ۱- است، معلوم کنید (کسرهایی که صورتشان با مخرج برابر یا قرینه‌ی آن است).

۵ــ از عبارت‌های زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{(x+y)z}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

۲ ب

$\frac{(x+2)(x+3)}{4(x+2)}=\frac{x+3}{4}$ $(x\neq -۲)$.

۳

اگر صورت و مخرج برابر باشند (مثلاً $\frac{y+2}{y+2}$) حاصل ۱ و اگر قرینه باشند (مثلاً $\frac{2-y}{y-2}$) حاصل ۱- است (در صورت غیر صفر بودن مخرج).

۵

عبارت‌های $\frac{z(x+y)}{t}$ ، $z(x+y)\times\frac{1}{t}$ ، $\frac{zx+zy}{t}$ و $\frac{zx}{t}+\frac{zy}{t}$ با آن برابرند؛ ولی $\frac{zx+y}{t}$ برابر نیست (z فقط در x ضرب شده).

عبارت‌ها در متن خوانا نبود؛ فقط قسمت‌های قابل بازسازی حل شد و پرسش‌های ۱ و ۴ و ۶ حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳۴ صفحه ۱۲۳ **فعالیت**

طول ضلع مربع داخل مستطیل، نصف عرض مستطیل است. اگر نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل $\frac{5}{26}$ باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید. (عرض مستطیل x+۵ و طول آن ۲x+۳) راه‌حل را کامل کنید و توضیح دهید: چگونه به کمک ساده‌کردن عبارت گویای به دست‌آمده و حل معادله، پاسخ به دست می‌آید؟

ضلع مربع $\frac{x+5}{2}$ و مساحت مربع $\frac{(x+5)^2}{4}$ ؛ مساحت مستطیل $(x+5)(2x+3)$.

$$\frac{(x+5)^2}{4(x+5)(2x+3)}=\frac{x+5}{4(2x+3)}=\frac{5}{26}\Rightarrow 26(x+5)=20(2x+3)\Rightarrow 14x=70\Rightarrow x=5$$

عرض $x+5=10$ و طول $2x+3=13$ سانتی‌متر. ابتدا عبارت گویا را با حذف عامل مشترک (x+۵) ساده کردیم و سپس با طرفین‌وسطین معادله‌ی خطی به دست آمد.

عرض و طول مستطیل از روی مرحله‌ی «x=۵ ⇒ ۷x=۳۵» کتاب بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳۵ صفحه ۱۲۵ **تمرین**

۷ــ اگر $A=a^2-b^2$ و $B=a^2+b^2$ و $C=2ab$ باشد، عبارت $\frac{B^2-A^2}{C}$ را به دست آورید.

۹ــ طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به‌صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.

۱۲ــ عرض مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید (مساحت مستطیل x^2-9 و یک بُعد آن $\frac{x^2-x-12}{x-4}$ است).

۷

$B^2 - A^2 = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$ ؛ پس $\frac{4a^2b^2}{2ab} = 2ab$.

۹

اگر عرض w باشد، طول $2w - 1$ ؛ محیط $2(w + 2w - 1) = 2(3w - 1)$ و مساحت $w(2w - 1)$ ؛ نسبت: $\frac{6w - 2}{2w^2 - w} = \frac{2(3w - 1)}{w(2w - 1)}$.

۱۲

$\frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$ ؛ عرض: $\frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3$.

صورت پرسش‌های ۷ و ۱۲ از روی ساختار عبارت‌ها بازسازی شد و بقیه‌ی پرسش‌های این صفحه (۸، ۱۰، ۱۱) در متن خوانا نبود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳۶ صفحه ۱۲۷ — کار در کلاس

مثال: چندجمله‌ای $2x^2 - 7x - 15$ را بر $x - 5$ تقسیم کنید و درستی را با رابطه‌ی تقسیم بررسی کنید. (ب)

نمونه‌ی مشابه: $(x^2 + 6x + 9) \div (x + 3)$

اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم: $\frac{2x^2}{x} = 2x$ ؛ حاصل‌ضرب $2x(x - 5) = 2x^2 - 10x$ را کم می‌کنیم: $3x - 15$ ؛ دوباره $\frac{3x}{x} = 3$ و $3(x - 5) = 3x - 15$ ؛ باقی‌مانده صفر است. پس $2x + 3 = \frac{2x^2 - 7x - 15}{x - 5}$ ؛ بررسی: $(x - 5)(2x + 3) = 2x^2 - 7x - 15$.

(ب) $(x^2 + 6x + 9) \div (x + 3) = x + 3$.

پرسش (ب) به‌صورت نمونه‌ی مشابه افزوده شده است. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳۷ صفحه ۱۳۰ — تمرین

۴ــ اگر چندجمله‌ای $20x^3 + 23x^2 - 10x + a$ بر $4x + 3$ بخش‌پذیر باشد، a را به دست آورید.

۵ــ خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $2x^2 + 9x - 9$ را بر هر یک از عبارت‌های زیر به دست آورید:

$x+۳$ ، $x-۳$ ، $۲x-۳$ ، $۲x+۳$. و رابطه‌ی تقسیم $(5x^2 + \ldots)(2x^2 - 3) + \ldots = 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19$ را کامل کنید (درجه‌ی باقی‌مانده از درجه‌ی $2x^2 - 3$ کمتر است).

۱ــ د) $(3y^2 - 10y - 24) \div (3y - 4)$

۴

باقی‌مانده باید صفر باشد؛ ریشه‌ی مقسوم‌علیه $x = -\frac{3}{4}$ را در چندجمله‌ای می‌گذاریم:

$20\left(-\frac{27}{64}\right) + 23\left(\frac{9}{16}\right) + \frac{30}{4} + a = 12 + a = 0$ ؛ پس $a = -12$ (خارج‌قسمت: $5x^2 + 2x - 4$).

۵

مقسوم‌علیه	خارج‌قسمت	باقی‌مانده
x+۳	۲x−۳	۰
x−۳	۲x+۱۵	۳۶
۲x−۳	x+۳	۰
۲x+۳	x+۳	−۱۸

$10x^4 - 3x^2 + 2x - 19 = (5x^2 + 6)(2x^2 - 3) + (2x - 1)$ ؛ خارج‌قسمت $5x^2 + 6$ و باقی‌مانده $2x - 1$ (درجه‌ی ۱ < ۲).

۱ د

خارج‌قسمت $y - 2$ و باقی‌مانده -32 ؛ رابطه: $3y^2 - 10y - 24 = (3y - 4)(y - 2) - 32$.

صورت پرسش‌های ۱ (بقیه)، ۲ و ۳ در متن خوانا نبود؛ ضرایب ۴ و ۵ و ۱ د از روی ساختار متن بازسازی شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی نهم - فصل هشتم

حجم و مساحت

فهرست

۲۳۸ صفحه ۱۳۱ · فعالیت — تعریف کره و نمونه‌های کروی ۱۳۳

۲۳۹ صفحه ۱۳۲ · فعالیت — حجم کره ۱۳۳

۲۴۰ صفحه ۱۳۲ · کار در کلاس — حجم کره و استوانه ۱۳۴

۲۴۱ صفحه ۱۳۳ · فعالیت — مساحت رویه‌ی کره ۱۳۴

۲۴۲ صفحه ۱۳۳ · کار در کلاس — مساحت نیم‌کره ۱۳۵

۲۴۳ صفحه ۱۳۴ · تمرین — کره‌ی زمین، استوانک و پیمانه ۱۳۵

۲۴۴ صفحه ۱۳۵ · فعالیت — آشنایی با هرم ۱۳۶

۲۴۵ صفحه ۱۳۶ · فعالیت — هرم منتظم و مقایسه‌ی حجم هرم‌ها ... ۱۳۶

۲۴۶ صفحه ۱۳۷ · کار در کلاس — هرم‌های هم‌حجم ۱۳۷

۲۴۷ صفحه ۱۳۷ · فعالیت — محاسبه‌ی حجم هرم (تجزیه‌ی منشور) ... ۱۳۷

۲۴۸ صفحه ۱۳۷ · کار در کلاس — حجم هرم ۱۳۸

۲۴۹ صفحه ۱۳۸ · فعالیت — هرم منتظم و مخروط ۱۳۸

۲۵۰ صفحه ۱۳۹ · کار در کلاس — حجم مخروط ۱۳۹

۲۵۱ صفحه ۱۳۹ · تمرین — حجم هرم و مخروط ۱۳۹

۲۵۲ صفحه ۱۴۰ · فعالیت — گسترده‌ی هرم و مخروط ۱۴۰

۲۵۳ صفحه ۱۴۱ · فعالیت — دوران و حجم حاصل ۱۴۱

۲۵۴ صفحه ۱۴۱ · کار در کلاس — مساحت کل هرم منتظم ۱۴۱

۲۵۵ صفحه ۱۴۲ · کار در کلاس — دوران ربع دایره ۱۴۱

۲۵۶ صفحه ۱۴۲ · فعالیت — نماها و برش کره ۱۴۱

۲۵۷ صفحه ۱۴۳ · تمرین — نسبت حجم به سطح و جعبه‌ی کره‌ها ... ۱۴۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳۸ صفحه ۱۳۱ **فعالیت**

۱ــ به تعریف دایره به‌عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید: دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه‌ی آن نقطه‌ها از یک نقطه‌ی ثابت در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله‌ی ثابت و مشخص هستند. به این اندازه‌ی ثابت شعاع دایره می‌گوییم. با توجه به این تعریف، کره را به‌عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید: «کره مجموعه _____ از فضا است که _____ مرکز _____ هستند. به این اندازه _____ می‌گوییم.»

۲ــ کره‌ی زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کروی است. چند نمونه‌ی دیگر از حجم‌های کروی را نام ببرید.

کره مجموعه‌ی **نقاطی** از فضا است که همه‌ی آنها از یک نقطه‌ی ثابت به نام **مرکز** به یک **فاصله‌ی ثابت** هستند. به این اندازه **شعاع** کره می‌گوییم.

نمونه‌های دیگر: توپ فوتبال، توپ تنیس، پرتقال، گوی شیشه‌ای، حباب صابون، ماه و خورشید (تقریباً)، مروارید.

۲۳۹ صفحه ۱۳۲ **فعالیت**

مانند شکل، کره‌ای را در استوانه‌ای قرار می‌دهیم که کره در آن محاط شود (از اطراف، بالا و پایین بر آن مماس باشد). اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده‌ی آن را بر حسب R نشان دهید و حجم استوانه را بنویسید. سپس توپ را به دو نیم‌کره‌ی مساوی ببرید؛ یکی را داخل استوانه بگذارید و نیم‌کره‌ی دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید؛ با دو نیم‌کره، فضای باقی‌مانده پر از آب می‌شود. الف) حجم استوانه چند برابر حجم نیم‌کره است؟ ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟ ج) بنابراین حجم کره _____ برابر حجم استوانه است. د) با توجه به دستور محاسبه‌ی حجم استوانه، دستور محاسبه‌ی حجم کره‌ی به شعاع R را به دست آورید.

ارتفاع استوانه ۲R و شعاع قاعده‌ی آن R است؛ حجم استوانه: $V = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$.

- الف) فضای باقی‌مانده با دو نیم‌کره‌ی آب (یعنی یک کره) پر می‌شود؛ با یک نیم‌کره‌ی داخل استوانه، حجم استوانه سه نیم‌کره است؛ پس حجم استوانه ۳ برابر حجم نیم‌کره است.
- ب) حجم کره ۲ نیم‌کره است؛ پس حجم استوانه $\frac{3}{2}$ (یک‌ونیم) برابر حجم کره است.
- ج) حجم کره $\frac{2}{3}$ برابر حجم استوانه است.
- د) $V = \frac{2}{3} \times 2\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$

حجم کره‌ای به شعاع R برابر است با $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

۲۴۰ صفحه ۱۳۲ | کار در کلاس

۱ــ کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر محاط شده است. الف) حجم کره را به دست آورید. ب) حجم استوانه را به دست آورید. ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

۲ــ حجم نیم‌کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را به دست آورید.

۱

قطر کره ۱۰ است؛ پس R=۵.

- الف) $V = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500}{3}\pi \approx 523.6$ سانتی‌متر مکعب
- ب) $V = \pi(5)^2 \times 10 = 250\pi \approx 785.4$ سانتی‌متر مکعب
- ج) $250\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{250}{3}\pi \approx 261.8$ سانتی‌متر مکعب

۲

$V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi(10)^3 = \frac{2000}{3}\pi \approx 2094.4$ سانتی‌متر مکعب.

۲۴۱ صفحه ۱۳۳ | فعالیت

نیم‌کره را روی کاغذ بگذارید و دو بار روی کاغذ دایره رسم کنید طوری که نیم‌کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد؛ این دو دایره‌ی کاغذی را برش بزنید و روی سطح نیم‌کره بچسبانید. آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم‌کره را با این دو دایره بپوشانید؟ درباره‌ی مشکلات این کار و تقریبی بودن آن گفت‌وگو کنید. ثابت می‌شود که مساحت رویه‌ی یک نیم‌کره به شعاع R، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم‌کره روی آن ایستاده است (قاعده‌ی نیم‌کره). الف) پس مساحت رویه‌ی نیم‌کره برابر است با: ____ ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با: ____

تقریباً می‌توان رویه را با دو دایره پوشاند (چون مساحت رویه‌ی نیم‌کره دو برابر مساحت قاعده است)؛ ولی چون سطح کروی خمیده است، کاغذ صاف روی آن چین می‌خورد و باید برش بزنیم؛ بنابراین کار دقیق نیست و فقط تقریبی است. با خرد کردن کاغذها به قطعه‌های کوچک‌تر دقت زیاد می‌شود.

- الف) $2 \times \pi R^2 = 2\pi R^2$
- ب) $2 \times 2\pi R^2 = 4\pi R^2$

مساحت یک کره به شعاع R برابر است با $S = 4\pi R^2$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴۲ صفحه ۱۳۳ | کار در کلاس

۱ــ مساحت یک کلاه (عرقچین) به شکل رویه‌ی نیم‌کره به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را پیدا کنید.

۲ــ می‌خواهیم یک نیم‌کره‌ی چوبی توپر به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ‌شده را پیدا کنید. بین محاسبه‌ی مساحت کل نیم‌کره‌ی چوبی توپر و مساحت رویه‌ی یک عرقچین چه تفاوتی هست؟

۱) $2\pi R^2 = 2\pi(10)^2 = 200\pi \approx 628$ سانتی‌متر مربع.

۲) علاوه بر رویه‌ی خمیده، قاعده‌ی دایره‌ای نیم‌کره هم رنگ می‌شود:
$2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 300\pi \approx 942$ سانتی‌متر مربع.

تفاوت: عرقچین فقط رویه‌ی خمیده (200π) دارد ولی نیم‌کره‌ی توپر قاعده‌ی دایره‌ای هم دارد ($+100\pi$).

۲۴۳ صفحه ۱۳۴ | تمرین

۱ــ قطر تقریبی کره‌ی زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است. الف) قطر و شعاع کره‌ی زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید. ب) مساحت تقریبی رویه‌ی (سطح) کره‌ی زمین را بر حسب کیلومتر مربع با نماد علمی بنویسید. ج) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱,۶۴۸,۰۰۰ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره‌ی زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

۲ــ یک استوانک (کپسول) گاز از قرار گرفتن یک نیم‌کره روی یک استوانه به‌صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره‌ی قاعده‌ی استوانک ۶۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن (قسمت استوانه‌ای) یک متر باشد، حجم استوانک را بر حسب متر مکعب به دست آورید. اگر بخواهیم سطح کل این استوانک را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است، به شرط اینکه رنگ‌آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز داشته باشد؟

۳ــ پیمانه‌ای به شکل نیم‌کره و به قطر دهانه‌ی ۲۴ سانتی‌متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱

- الف) قطر: 1.28×10^4 km ؛ شعاع: 6.4×10^3 km.
- ب) $S = 4\pi R^2 = 4(3.14)(6.4 \times 10^3)^2 \approx 5.14 \times 10^8$ کیلومتر مربع.
- ج) $\frac{1.648 \times 10^6}{5.14 \times 10^8} \approx 3.2 \times 10^{-3}$ ؛ حدود ۰/۳۲ درصد (تقریباً $\frac{1}{312}$).

۲

شعاع $r = 0.3$ متر؛ حجم استوانه $\pi(0.3)^2(1) = 0.09\pi$ و حجم نیم‌کره $\frac{2}{3}\pi(0.3)^3 = 0.018\pi$ ؛ جمع: $0.108\pi \approx 0.339$ متر مکعب.

سطح کل = سطح جانبی استوانه + قاعده‌ی پایین + رویه‌ی نیم‌کره: $2\pi(0.3)(1) + \pi(0.3)^2 + 2\pi(0.3)^2 = 0.6\pi + 0.09\pi + 0.18\pi = 0.87\pi \approx 2.73$ متر مربع؛ رنگ لازم: $2.73 \times 100 \approx 273$ گرم (حدود ۰/۲۷ کیلوگرم).

۳

شعاع ۱۲؛ حجم آب (نیم‌کره): $\frac{2}{3}\pi(12)^3 = 1152\pi$ ؛ در لیوان استوانه‌ای با همان شعاع: $\pi(12)^2 h = 1152\pi \Rightarrow h = 8$ سانتی‌متر.

در قسمت ۲ فرض شده است قاعده‌ی پایین استوانک هم رنگ می‌شود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۴۴ صفحه ۱۳۵ **فعالیت**

در هرم نشان‌داده‌شده (هرم OABCDE با ارتفاع OH): نام رأس، تعداد وجه‌ها، شکل وجه‌ها، شکل قاعده و نام قاعده را بنویسید. یک نمونه‌ی دیگر از شکل‌های هرمی را نام ببرید.

- نام رأس: O
- تعداد وجه‌ها: ۶ (۵ وجه جانبی + ۱ قاعده)
- شکل وجه‌ها: وجه‌های جانبی مثلث‌اند
- شکل قاعده: پنج‌ضلعی
- نام قاعده: ABCDE (چندضلعی ABCDE)

نمونه‌ی دیگر: سقف برخی ساختمان‌ها، چادر مخروطی-هرمی، هرم لوور در پاریس، مناره‌ها و گلدسته‌های هرمی‌شکل.

شکل هرم دیده نشد (از متن همان هرم OABCDE در نظر گرفته شد). این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۴۵ صفحه ۱۳۶ **فعالیت**

۱ــ در هرم منتظم مقابل، نام رأس، ارتفاع، شکل قاعده، شکل وجه‌های جانبی و تعداد وجه‌ها را بنویسید.

۲ــ الف) با توجه به شکل‌ها (۱ و ۲: مثلث‌های قاعده هم‌نهشت، ارتفاع $OH > O'H'$؛ ۳ و ۴: ارتفاع‌ها برابر و $S(ABC) < S(A'B'C')$) به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟ ج) برای محاسبه‌ی مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می‌کردید؟ برای محاسبه‌ی حجم

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هرم چه حدسی می‌زنید؟ د) اگر دو هرم دارای قاعده‌هایی با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، درباره‌ی حجم‌های آنها چه می‌توانید بگویید؟

۱

- نام رأس: O ؛ ارتفاع: OH ؛ شکل قاعده: مربع (ABCD) ؛ وجه‌های جانبی: مثلث‌های هم‌نهشت (متساوی‌الساقین) ؛ تعداد وجه‌ها: ۵.

شکل هرم دیده نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲

- الف) در شکل‌های (۱) و (۲): قاعده‌ها هم‌نهشت‌اند و ارتفاع هرم دوم بیشتر است؛ پس $V' > V$. در شکل‌های (۳) و (۴): ارتفاع‌ها برابرند و قاعده‌ی هرم دوم بزرگ‌تر است؛ پس باز هم $V' > V$.
- ب) حجم هرم به مساحت قاعده و ارتفاع هرم بستگی دارد.
- ج) مساحت مثلث از (قاعده × ارتفاع) تقسیم بر ۲ به دست می‌آید؛ حدس می‌زنیم حجم هرم با (مساحت قاعده × ارتفاع) متناسب است: $V = \frac{1}{3}Sh$.
- د) حجم‌های آنها با هم برابر است.

۲۴۶ صفحه ۱۳۷ **کار در کلاس**

در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب‌مستطیل و M و N دو نقطه‌ی دلخواه روی وجه مقابل ($A'B'C'D'$) است. چرا هرم‌های MABCD و NABCD دارای حجم‌های یکسان است؟ به این ترتیب چند هرم می‌توان ساخت که با هرم‌های بالا حجم یکسان داشته باشند؟

هر دو هرم قاعده‌ی مشترک ABCD دارند و ارتفاع هر دو برابر فاصله‌ی دو وجه موازی مکعب‌مستطیل است؛ چون قاعده‌ها هم‌مساحت و ارتفاع‌ها برابرند، حجم آنها یکسان است. هر نقطه‌ی دیگر روی وجه $A'B'C'D$ را هم می‌توان رأس گرفت؛ پس بی‌شمار هرم هم‌حجم می‌توان ساخت.

۲۴۷ صفحه ۱۳۷ **فعالیت**

در شکل، منشوری با دو قاعده‌ی ABC و DEF را می‌بینید. نقطه‌ی C را به نقطه‌های E و D و نقطه‌ی B را به نقطه‌ی D وصل می‌کنیم؛ منشور به سه هرم تجزیه می‌شود. با پاسخ دادن به سؤال‌های زیر نشان دهید که این سه هرم حجم‌های برابر دارد و نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها یک سوم حجم منشور است. ۱ــ چهارضلعی ABED چه نوع چهارضلعی است؟ چرا مثلث‌های ABD و BDE هم‌مساحت‌اند؟ ۲ــ چرا هرم‌های

CBED و CBAD دارای حجم‌های برابرند؟ ۳ــ چرا مثلث‌های DEF و ABC هم‌مساحت‌اند؟ ۴ــ چرا هرم‌های CDEF و DABC دارای حجم‌های برابرند؟ ۵ــ با توجه به پاسخ سؤال‌های ۲ و ۴ چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

- ۱) وجه جانبی منشور است و متوازی‌الاضلاع (در منشور قائم مستطیل) است؛ قطر BD آن را به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کند؛ پس $S_{ABD} = S_{BDE}$.
- ۲) دو هرم رأس مشترک C دارند، قاعده‌های BED و BAD هم‌مساحت‌اند (سؤال ۱) و ارتفاعشان (فاصله‌ی C تا صفحه‌ی ABED) یکی است؛ پس حجم‌ها برابرند.
- ۳) دو قاعده‌ی منشور با هم هم‌نهشت‌اند؛ پس مساحت‌هایشان برابر است.
- ۴) هرم‌های CDEF و DABC قاعده‌های هم‌مساحت (DEF و ABC) و ارتفاع برابر (فاصله‌ی دو قاعده‌ی منشور) دارند؛ پس حجم‌هایشان برابر است.
- ۵) هر سه هرم حجم برابر دارند و مجموع حجم‌هایشان حجم منشور است؛ پس حجم هر هرم یک‌سوم حجم منشور است: $V = \frac{1}{3}Sh$ (S مساحت قاعده و h ارتفاع).

۲۴۸ صفحه ۱۳۷ **کار در کلاس**

در هرم OABC، AC = ۶ سانتی‌متر، BC = ۱۰ سانتی‌متر و زاویه‌ی ACB برابر ۹۰° است. ارتفاع هرم OH مساوی ۵ سانتی‌متر است. با کامل کردن عبارت‌های زیر حجم هرم را به دست آورید.

مساحت قاعده: $S = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{6 \times 10}{2} = 30\ cm^2$

حجم: $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 30 \times 5 = 50$ سانتی‌متر مکعب.

۲۴۹ صفحه ۱۳۸ **فعالیت**

۱ــ در شکل، هرم منتظم با قاعده‌ی مربع رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰ سانتی‌متر و M وسط BC است. الف) پاره‌خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟ ب) مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ ج) اگر طول ضلع قاعده ۱۲ سانتی‌متر باشد، به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OBM طول OM را حساب کنید. د) مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟ هـ) به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OMH طول OH را به دست آورید. و) حجم هرم OABCD را به دست آورید.

۲ــ هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده‌ی آن یک چندضلعی منتظم باشد. حال تعداد ضلع‌های این چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چندضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟

- الف) OM در مثلث متساوی‌الساقین OBC هم میانه، هم ارتفاع و هم نیمساز است؛ پس بر BC عمود است.
- ب) مثلث OBM قائم‌الزاویه است (زاویه‌ی M قائمه).
- ج) $BM = 6,\ OB = 10 \Rightarrow OM = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ سانتی‌متر.
- د) مثلث OMH قائم‌الزاویه است (زاویه‌ی H قائمه)؛ H مرکز مربع و M وسط ضلع است؛ پس $MH = \frac{12}{2} = 6$ سانتی‌متر.
- هـ) $OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \approx 5.29$ سانتی‌متر.
- و) $V = \frac{1}{3} \times 12^2 \times 2\sqrt{7} = 96\sqrt{7} \approx 254$ سانتی‌متر مکعب.

۲) با زیاد شدن تعداد ضلع‌ها، چندضلعی منتظم به دایره و هرم به مخروط نزدیک می‌شود. مخروط شکلی شبیه هرم منتظم است که قاعده‌ی آن دایره و پای ارتفاع مرکز دایره است؛ حجم مخروط مانند هرم $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ است.

۲۵۰ صفحه ۱۳۹ **کار در کلاس**

علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، مخروطی به قطر قاعده‌ی ۱۲ سانتی‌متر ساخته است. حجم این مخروط را به دست آورید.

شعاع قاعده $R = 6$ و مولد مخروط (شعاع دایره) ۱۰ است؛ ارتفاع: $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. حجم: $V = \frac{1}{3}\pi(6)^2(8) = 96\pi \approx 301.6$ سانتی‌متر مکعب.

۲۵۱ صفحه ۱۳۹ **تمرین**

۱ــ حجم هرمی را به دست آورید که قاعده‌ی آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر باشد.

۲ــ حجم هرمی با قاعده‌ی مربع را به دست آورید که ضلع قاعده‌ی آن ۴ سانتی‌متر باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۸ سانتی‌متر باشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳ــ ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه‌ی ۴ سانتی‌متر و به ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعده‌ی آن ۶ سانتی‌متر است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

۱

$V = \frac{1}{3}(6 \times 5)(10) = 100$ سانتی‌متر مکعب.

۲

نصف قطر مربع: $\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ؛ ارتفاع هرم: $h = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{64 - 8} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \approx 7.48$ ؛ حجم: $V = \frac{1}{3}(16)(2\sqrt{14}) = \frac{32\sqrt{14}}{3} \approx 39.9$ سانتی‌متر مکعب.

۳

حجم آب: $\frac{1}{3}\pi(4)^2(12) = 64\pi$ ؛ در لیوان: $\pi(6)^2h = 64\pi \Rightarrow h = \frac{64}{36} = \frac{16}{9} \approx 1.78$ سانتی‌متر.

۲۵۲ صفحه ۱۴۰ **فعالیت**

۳ــ با $\frac{3}{4}$ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر یک سطح مخروطی‌شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟ چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره‌ی قاعده‌ی مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده‌ی مخروط را پیدا کنید.

۱ــ با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب‌مستطیل، اندازه‌ی ضلع‌ها را در گسترده‌ی هر کدام مشخص کنید. ۲ــ مساحت گسترده‌ی هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

۳

طول کمان: $\frac{3}{4} \times 2\pi(10) = 15\pi \approx 47.1$ سانتی‌متر. این کمان همان محیط دایره‌ی قاعده‌ی مخروط است: $2\pi r = 15\pi \Rightarrow r = 7.5$ سانتی‌متر.

۱ و ۲

در گسترده‌ی مکعب‌مستطیل ۶ مستطیل (دو به دو هم‌نهشت) و در گسترده‌ی هرم یک قاعده و چند مثلث جانبی هست؛ مساحت گسترده = مساحت قاعده + مجموع مساحت وجه‌های جانبی (هر مثلث $\frac{1}{2}$ × قاعده × ارتفاع وجه).

شکل‌ها و اندازه‌های قسمت‌های ۱ و ۲ دیده نشد و فقط روش حل نوشته شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵۳ صفحه ۱۴۱ فعالیت

۱ــ با دوران دادن یک مستطیل (ابعاد ۳ و ۱۰ سانتی‌متر) حول ضلع آن چه حجمی به دست می‌آید؟ شعاع قاعده‌ی شکل حاصل و ارتفاع آن را بنویسید و حجم را پیدا کنید.

۲ــ اگر مثلث قائم‌الزاویه را حول ضلع مشخص‌شده در شکل دوران دهیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ حجم آن را پیدا کنید.

۱) استوانه؛ اگر حول ضلع ۱۰ بچرخد: شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۱۰ : $V = \pi(3)^2(10) = 90\pi \approx 282.7$ سانتی‌متر مکعب.

۲) مخروط؛ حجم: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ که r ضلع قائم دیگر (شعاع) و h ضلع محور دوران است؛ مثلاً برای r=۱۰ و h=۲۰: $\frac{2000}{3}\pi \approx 2094$.

اندازه‌ها و شکل‌ها دیده نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۵۴ صفحه ۱۴۱ کار در کلاس

۱ــ مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید. طول همه‌ی یال‌های آن a است.

اگر قاعده‌ی هرم مربع باشد: قاعده a^2 و چهار وجه جانبی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a با مساحت $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ؛ جمع: $a^2 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = (1+\sqrt{3})a^2$.

شکل هرم دیده نشد (قاعده‌ی مربع فرض شد). این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۵۵ صفحه ۱۴۲ کار در کلاس

حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵ سانتی‌متر را حول شعاع آن پیدا کنید.

دوران ربع دایره حول یکی از شعاع‌هایش یک نیم‌کره می‌سازد: $V = \frac{2}{3}\pi(5)^3 = \frac{250}{3}\pi \approx 261.8$ سانتی‌متر مکعب.

۲۵۶ صفحه ۱۴۲ فعالیت

۲ــ اگر هر کدام از هرم‌های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می‌شود؟ الف) هرم منتظم با قاعده‌ی مثلث ب) با قاعده‌ی مربع ج) با قاعده‌ی شش‌ضلعی

۳ــ کره‌ی مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده‌شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟

۲

- الف) مثلث متساوی‌الاضلاع که سه پاره‌خط از رأس‌های آن به مرکزش وصل شده است (تصویر یال‌های جانبی).
- ب) مربعی که دو قطر آن رسم شده است.
- ج) شش‌ضلعی منتظمی که شش پاره‌خط از رأس‌های آن به مرکزش وصل شده است.

۳

سطح بریده‌شده یک دایره است؛ وقتی صفحه از مرکز کره بگذرد، دایره بیشترین مساحت را دارد (دایره‌ی عظیمه به شعاع R و مساحت πR^2).

پرسش‌های ۱ (رسم نماها) و ۴ (شکل کره) به شکل وابسته بود و حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۵۷ صفحه ۱۴۳ تمرین

۱ــ حجم و سطح کل شکل‌های زیر را پیدا و با هم مقایسه کنید: مکعب به ضلع a ؛ استوانه به ارتفاع a و شعاع قاعده‌ی a ؛ استوانه به ارتفاع a و قطر قاعده‌ی a ؛ کره به شعاع a. در هر مورد، نسبت حجم به سطح $\left(\frac{V}{S}\right)$ را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ‌تر است؟

۲ــ از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع‌شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقی‌مانده یک جعبه‌ی مکعب‌مستطیل‌شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای باید بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد به طوری که هر کره به کره‌ی مجاورش و به دیواره‌ی جعبه مماس باشد؟

شکل	V حجم	S سطح کل	V ÷ S
مکعب به ضلع a	a^3	$6a^2$	$\frac{a}{6}$
استوانه (r=a, h=a)	πa^3	$2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$	$\frac{a}{4}$
استوانه (قطر a, h=a)	$\frac{\pi a^3}{4}$	$\frac{\pi a^2}{2} + \pi a^2 = \frac{3\pi a^2}{2}$	$\frac{a}{6}$
کره به شعاع a	$\frac{4}{3}\pi a^3$	$4\pi a^2$	$\frac{a}{3}$

نسبت $\frac{V}{S}$ در کره بزرگ‌تر است ($\frac{a}{3}$).

۲

قاعده‌ی جعبه مربعی به ضلع $a - 2x$ است. چهار کره‌ی مماس (دو در دو) هر ضلع قاعده را با دو قطر پر می‌کنند: $a - 2x = 4x \Rightarrow a = 6x$.

شکل‌های پرسش ۱ دیده نشد (از روی متن فهرست شد) و پرسش «اسفنج مکعبی» (کار در کلاس) به شکل وابسته بود و حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir